*

Tractatus-modeller og begrepsrammer.

*

Morten Rognes

1998

*

Forord

Det følgende arbeid er basert på notater som forfatteren gjorde i 1983. Disse notatene ble liggende uten å bli bearbeidet helt til høsten 1998. Da gjenopptok jeg arbeidet med dem og begynte å renskrive dem. Notatene fra 1983 utgjorde et stort sett sammenhengende manuskript og kunne renskrives uten altfor store forandringer. Under renskrivningsarbeidet ble en del unøyaktigheter og feil rettet opp. Videre ble det utarbeidet bevis for satser som bare ble formulert i det opprinnelige manuskript uten at det ble tilveiebrakt noen detaljert argumen-tasjon til fordel for dem. Dette gjelder særlig Teorem 4. Visse definisjoner ble også formulert bedre. I denne forbindelse kan man nevne definisjonene av isomorfirelasjonene som blir introdusert ved Definisjon 5 – Definisjon 7.

Dette arbeidet forutsetter at leseren er fortrolig med visse andre arbeider av forfatteren. For det første bør man ha lest "En oversikt over definisjoner av noen sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", Rognes [1]. I dette skrift gir vi detaljerte definisjoner (av standardpreget karakter) av alle de grunnleggede begrepene av logisk, mengdeteoretisk og matematisk art som brukes uten spesielle forklaringer her og derfor stilltiende tas for gitt. Videre bør man ha lest igjennom og være fortrolig med "En teori om presise deskriptive utsagn", Rognes [2], samt to andre arbeider som dreier seg om egenskaper: "Egenskaper. Del I" og "Egenskaper. Del II (Bevis for teoremer)", henholdsvis Rognes [4] og Rognes [5]. Det vil også være en fordel om man har lest igjennom og er kjent med innholdet i Rognes [3]: "En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn". Forøvrig forutsettes det at leseren har en rimelig bra kjennskap til de viktigste resultatene i predikatlogikk og mengdelære.

La oss nå gi en oversikt over innholdet i det følgende arbeid. Vi tar vårt utgangspunkt i den aller første delen av Wittgensteins "Tractatus logico-philosophicus" hvor Wittgenstein gjør rede for de mer grunnleggende ontologiske komponentene i den språkteorien han legger frem. I denne forbindelse definerer vi en klasse av rent mengdeteoretiske strukturer som vi kaller for Tractatus-ontologier. Disse er ment å gi en forenklet rekonstruksjon av visse aspekter ved ontologien i Tractatus.

En Tractatus-ontologi er et fire-tuple <G,S,K,B> som oppfyller visse krav. I en slik struktur er det meningen at G er en ikke-tom mengde som representerer mengden av alle de objekter som Wittgenstein kaller gjenstander. S er en ikke-tom mengde som representerer klassen av alle de saksforhold som kan bygges opp ved hjelp av gjenstandene. Videre er K en klasse med måter som gjenstander kan kjedes sammen til saksforhold på. Det virker som om Wittgenstein tenker seg en rekke slike konsitusjonsmåter eller sammenkjedningsmåter av gjenstander. I vår forenklede versjon av ontologien i Tractatus representerer K mengden av alle disse sammenkjedningsmåtene. Endelig er B en relasjon som består mellom et saksforhold, en sekvens av gjenstander og en konstitusjonsmåte hvis og bare hvis saksforholdet er bygget opp fra gjenstandene i sekvensen på den gitte konsti-tusjonsmåten. I tillegg til disse kravene oppfyller også en Tractatus-ontologi visse krav T1 – T8 som komponentene må oppfylle og som vi formulerer helt presist. Det virker som om disse kravene avspeiler en del av de viktigste synspunktene Wittgenstein gir uttrykk for i Tractatus når det gjelder saksforhold og gjenstander.

For ytterligere å belyse begrepet Tractatus-ontologi innfører vi i våt arbeid en litt annen type strukturer, nemlig det vi kaller T-strukturer. En T-struktur er et fire-tuple <G,S,K,f> der G,S,K er ikke-tomme mengder og f er en funksjon som oppfyller visse nærmere bestemte krav. Man kan si at f er en funksjon som til hvert element kêK tilordner k en partiell en-entydig funksjon fra G^n (n≥) inn i S. Verdiområdene til de diverse f(k) ettersom k gjennomløper K er innbyrdes disjunkte, og ethvert element i S er med i verdiområdet til en eller annen av funksjonene i knippet <f(k)>/kêK/. Videre kreves det at ethvert objekt i G opptrer som ledd i et eller annet element i domenet til en f(k) for noe kêK.

Vi viser at denne typen av strukturer i det vesentlige er ekvivalente med Tractatus-ontologiene. Mer nøyaktig viser vi hvordan man til enhver Tractatus-ontologi kan konstruere en tilsvarende "kanonisk" T-struktur på en naturlig måte. Omvendt viser vi også hvordan man til enhver T-struktur kan konstruere en Tractatus-ontologi på en naturlig måte.

Det viktigste tema i dette skriftet er imidlertid og relatere begrepene Tractatus-ontologi og T-struktur til begreper som vi har behandlet i forbindelse med egenskapsteorien E;3 i Rognes [4]. La oss bemerke at "I" i det følgende betegner klassen av alle logisk mulige verdener. Vi identifiserer mengden av utsagn med funksjonene i klassen 2^I. Med et n-ært attributt over mengden D forstår vi en funksjon fra D^n, mengden av n-tupler over D, inn i klassen av utsagn, ie. 2^I.

Med en begrepsramme over en mengde D forstår vi en funksjon ß som til ethvert naturlig tall n≥1 tilordner en mengde med n-ære attributter over D og som til tallet 0 tilordner en mengde av utsagn. De forskjellige ß(n) kan i prinsippet være tomme. Men det kreves at ß(n) er ikke-tom for minst et n≥1. Med andre ord må en begrepsramme inneholde minst ett attributt.

Vi avgrenser en bestemt type av begrepsrammer, nemlig det vi kaller "Tractatus-rammer". Det som karakteriserer en Tractatus-ramme er for det første at ethvert n-ært attributt a i en slik ramme har et domene som inkluderer en mengde X som er slik at a tilordner ethvert element i X et konsistent utsagn, mens a tilordner alle elementene i D^n–X det kontradiktoriske utsagn. For det andre kreves det av ethvert par av distinkte attributter at verdiområdene til dem, minus det kontradiktoriske utsagn, er innbyrdes disjunkte. For det trdje kreves det av en slik ramme at unionen av alle verdiområdene til attributtene som inngår i begrepsrammen, fratrukket det kontradiktoriske utsagn, skal utgjøre en strengt uavhengig utsagnsmengde der tillukningen under uendelig konjunksjon og negasjon uttømmer mengden av alle utsagn.

I forbindelse med Tractatus-rammer viser vi hvordan man, gitt en slik ramme, på en naturlig måte kan konstruere en tilsvarende T-struktur. Dessuten viser vi hvordan man, dersom man starter med en T-struktur, kan konstruere en tilsvarende Tractatus-ramme på en naturlig måte. Disse resultatene kan imidlertid skjerpes.

I forbindelse med Tractatus-rammer innføres en isomorfi-relasjon. Dette er en ekvivalensrelasjon som inndeler denne klassen i innbyrdes disjunkte, ikke-tomme, ekvivalensklasser som samlet uttømmer klassen. På tilsvarende vis innføres en isomorfi-relasjon mellom T-strukturer. Endelig innføres en mer spesiell isomorfi-relasjon mellom T-strukturer og Tractatus-rammer. Denne er slik at dersom ß1 og ß2 er to isomorfe Tractatusrammer og t er en T-struktur som er isomorf med den ene av dem, f.eks. ß1, så er t også isomorf med den andre,dvs. ß2. Videre er denne mer spesielle isomorfi-relasjonen definert slik at dersom t er en T-struktur som er isomorf med ß1, såvel som ß2, der ß1 og ß2 er Tractatus-rammer, så vil ß1 og ß2 innbyrdes være isomorfe. Tilsvarende har man at dersom t1 og t2 er to T-strukturer som begger er isomorfe med Tractatus-rammen ß så er t1 isomorf med t2. Videre er det slik at dersom Tractatus-rammen ß er isomorf med T-strukturen t1 og t1 isomorf med t2 så vil også ß være isomorf med t2.

Vi nevnte ovenfor at man gitt en Tractatus-ramme ß kan konstruere en naturlig korresponderende T-struktur t;ß. Vi viser at denne T-strukturen er isomorf med den tilsvarende Tractatus-rammen. Dette rettferdiggjør uttrykksmåten "naturlig korresponderende" om t;ß. Tilsvarende nevnte vi at man, gitt en T-struktur t, på en naturlig måte kan konstruere en Tractatus-ramme ß;t. Man kan nå vise at denne t-strukturen t er isomorf med ß;t. De resultatene som er nevnt her er hovedresultatene i arbeidet. Sammen med de resultatene som tidligere er nevnt viser de at Tractatus-ontologier, T-strukturer og Tractatus-rammer i en viss forstand er helt ekvivalente strukturer.

Det er klart at hovedhensikten med å gi bevis for disse formelle resultatene har vært å karakterisere mer presist sammenhengen mellom en rekke idéer som det er nærliggende å lese ut av Wittgensteins Tractatus og de utsagns og egenskapsteoriene vi har diskutert i arbeidene Rognes [2] og Rognes [4].

Morten Rognes

September 1998

Tractatus-modeller og begrepsrammer.

I sin Tractatus Logico-Philosophicus synes Wittgenstein å ha tenkt seg at det finnes en klasse av saksforhold.[1] Disse saksforhold eksisterer helt uavhengig av hverandre, med andre ord kan man til enhver slik mengde med saksforhold tenke seg en situasjon hvor alle saksforholdene i mengden foreligger mens de resterende ikke foreligger.[2] Videre virker det som om Wittgenstein har tenkt seg at det finnes en mengde med gjenstander, Gegenstände.[3] Disse to grunnleggende entitet-kategoriene synes det som om Wittgenstein tenker seg ikke-tomme. Angående sammenhengen mellom gjenstander og saksforhold fremlegges den tanke at saksforholdene er en slags sammenkjedninger av gjenstander.[4] Wittgenstein nevner ikke eksplisitt noe om hvor mange gjenstander som kan være sammenkjedet i et saksforhold, men det synes i det minste ikke å stride mot noe annet han sier om man antar at antallet alltid er endelig. La oss betegne klassen av saksforhold i Wittgensteins forstand med S og klassen av gjenstander med G. La oss videre betegne klassen av alle gjenstandssekvenser av lengde n, der n er et naturlig tall, med G^n. Som nevnt synes Wittgenstein å tenke seg at det i et saksforhold alltid forekommer en viss sekvens av gjenstander som er sammenkjedet på en bestemt måte. Det kan derfor virke som om han ved siden av mengdene S og G forestiller seg eksistensen av en ikke-tom mengde med måter som gjenstander kan kjedes sammen til saksforhold på.[5] Vi vil i det følgende betegne denne klassen av måter som gjenstandssekvenser kan føyes sammen til saksforhold på med K.

La oss tenke oss at vi nå har valgt ut en slik konstruksjonsmåte kêK og at vi enn mer har valgt ut et saksforhold sêS, samt en sekvens av gjenstander <a;1,....,a;n> slik at s er det saksforholdet der gjenstandene i sekvensen er kjedet sammen på måten k. Tenker man seg at man holder konstitusjonsmåten k fiksert og varierer gjenstandssekvensen <a;1,...,a;n> synes tanken i Tractatus å være at det i så fall fremkommer visse nye saksforhold som har bestemte strukturelle fellestrekk med s. Velger man f.eks. ut en sekvens av samme lengde <a';1,...,a';n>êG^n vil det følgelig finnes et saksforhold s' slik at s' er det saksforholdet hvor gjenstandene i sekvensen <a';1,...,a';n> er sammen-kjedet på måten k. I lys av disse overveielsene virker det naturlig å tillegge Wittgenstein den tanke at det til hver konstitusjonsmåte kêK finnes en viss funksjon, f;k, som til enhver gjenstandssekvens <a;1,...,a;n> i en delmengde X av G^n alltid tilordner sekvensen et bestemt saksforhold s = f;k(<a;1,...,a;n>).

La oss videre tenke oss at man har for seg to saksforhold s;1 og s;2. Anta at i saksforholdet s;1 er individene, eller gjenstandene, i sekvensen <a;1,...,a;n> kjedet sammen på måten k;1 og at i saksforholdet s;2 er gjenstandene i sekvensen <b;1,...,b;m> kjedet sammen på måten k;2. Gitt denne antagelsen kan man betrakte forskjellige muligheter.

For det første kan man betrakte den mulighet at k;1=k;2. Er det i så fall mulig at m≠n? Det virker imidlertid som om to saksforhold hvor gjenstandene i to sekvenser av forskjellig lengde er kjedet sammen i hvert sitt saksforhold må ha forskjellig struktur og at de derfor må være konstituert på forskjellig måte. Dette synes i det minste ikke å stride mot noe

---

[1] Se Tractatus 2 og 2.01

[2] De bemerkningene i Tractatus som synes mest relevante her er 2.05, 2.06, 2.061 og 2.062

[3] Tractatus 2.011, 2.012, 2.0121. Videre 2.0122.

[4] Se Tractatus 2.0272, 2.03, 2.031.

[5] Wittgenstein sier ikke noe eksplisitt om dette, men bemerkningene 2.031, 2.032,2.033 og 2.034 synes å passe sammen med denne tanken.

Wittgenstein uttrykkelig sier i Tractatus. Et benektende svar på spørsmålet virker derfor berettiget.

Anta fremdeles at k;1=k;2, men at m=n. Forutsett videre at de to gjenstandssekvensene er identiske, dvs. at

<a;1,...,a;n> = <b;1,...,b;n>

Kan da s;1 ≠ s;2 ? I så tilfelle vil man måtte medgi at det finnes to forskjellige saksforhold som er bygd opp fra gjenstandene i den samme gjenstandssekvens på samme måte. Igjen er det ikke så lett å se på grunnlag av Tractatus om Wittgenstein mener dette er mulig, eller om han benekter det. Imidlertid synes det benektende svaret å passe best sammen med hans øvrige synspunkter. Med andre ord er et saksforhold entydig bestemt dersom gjenstandene, rekkefølgen av gjenstandene og sammensetningsmåten av gjenstandene er bestemt.

Fra de overveielsene som så langt er fremsatt følger det at om kêK, dvs. om k er en konstitusjonsmåte, så vil klassen av alle de par <a,s> der a er en sekvens av gjenstander og s er et saksforhold der s er bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a på måten k være en funksjon. Domenet i denne funksjonen, som utgjøres av alle venstrekomponentene i parene, vil dessuten alle være genstandssekvenser av samme lengde.

For å bringe større klarhet i våre utlegninger vil vi nå innføre en del symboler og formalisere en del av de påstander som synes å være grunnleggende i den ontologiske teorien som fremlegges i Tractatus. Som allerede nevnt lar vi "G" betegne klassen av gjenstander, "gegenstände", i Wittgensteins forstand. "S" betegner klassen av alle saksforhold. Videre lar vi "K" betegne klassen av alle sammensetningsmåter, eller konstitusjonsmåter. Tilslutt betegner "B" mengden av alle tripler <s,a,k> der s er et saksforhold, a en endelig sekvens av gjenstander, k er en konstitusjonsmåte og der man har at saksforholdet s er bygd opp ved hjelp av gjenstandene i sekvensen a på måten k.

Gitt disse konvensjonene kan en av de grunnleggende tankene vi har nevnt ovenfor formuleres slik:

T1 G≠ø & S ≠ø & K≠ø

Mengden av gjenstander, mengden av saksforhold og mengden av konstitu-sjonsmåter er altså alle ikke-tomme mengder.

En annen tanke, som vi ikke har nevnt ovenfor på grunn av dens trivialitet, men som er viktig ved et forsøk på en eksplisitt rekonstruksjon av ontologien i Tractatus, er denne:

T2 B(s,a,k) –> (sêS & (En)(nêNat & n≥1 & aêG^n) & kêK)

Her betegner "G^n" mengden av alle sekvenser av gjenstander med lengde n. Merk at "Nat" i det følgende står for mengden av de naturlige tall. Det setningen sier er det trivielle at dersom s er et saksforhold som er bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a på måten k, så er s et saksforhold, a en gjenstandssekvens av lengde n for et eller annet naturlig tall, der n≥1, og k en konstitusjonsmåte.

De neste to formuleringene uttrykker tanker som har blitt formulert ovenfor:

T3 kêK & B(s;1,a,k) & B(s;2,a,k). –> s;1 = s;2
& (Ak)(kêK –> (Es)(Ea)(B(s,a,k)))

Hva T3 sier er at dersom k er en konstitusjonsmåte og s;1, s;2 er to saksforhold som begge er bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a på måten k så er de to saksforholdene identiske. I tillegg sier T3 at dersom k er en konstitusjonsmåte så finnes det en gjenstandssekvens a og et saksforhold s slik at s er bygget opp fra gjenstandene i sekvensen a på måten k.

T4 kêK & B(s;1,a;1,k) & B(s;2,a;2,k) –> (En)(n≥1 & nêNat & a;1,a;2êG^n)

Er altså k en konstitusjonsmåte og s;1 et saksforhold som er bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a;1 på måten k og dessuten s;2 et saksforhold som er bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a;2 på den samme måten k så må a;1 og a;2 begge være gjenstandssekvenser av samme lengde. Som man ser nevnte vi denne tesen ovenfor.

La oss nå se på den følgende setning:

T5 B(s;1,a;1,k;1) & B(s;2,a;2,k;2) & k;1≠k;2. –> s;1≠s;2

Innholdet til denne formelen kan formuleres i vanlig språk på den følgende måte: Anta s;1 er et saksforhold som er bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a;1 på måten k;1, og at a;2 er et saksforhold som er et saksforhold som er bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a;2 på måten k;2. Anta tilslutt at konstitusjonsmåtene k;1 og k;2 er forskjellige. Da må ifølge T5 også saksforholdene s;1 og s;2 være forskjellige. Det kan sikkert med rette betviles om Wittgenstein uttrykkelig skriver noe i Tractatus som en bekreftelse på at han mener T5 er riktig. Men prinsippet virker nokså rimelig ut fra den betydning som er blitt tillagt relasjonen B og det synes passe godt sammen med prinsippene T1 – T4 og de øvrige prinsipper som vi vil nevne. Dessuten virker det også korrekt å si at T5 ikke strider mot rimelige tolkninger av andre sentrale sentenser i Tractatus. Alt dette synes å tale til fordel for at man i en mer eksplisitt rekonstruksjon av ontologien i Tractatus kan ta med prinsippet. Nøyaktig de samme overveielsene kan gjøres i forbindelse med den følgende tese:

T6 kêK & B(s;1,a;1,k) & B(s;2,a;2,k) & a;1 ≠ a;2. –> s;1≠s;2

Her kan innholdet formuleres i ord på den følgende måte: Er s;1 et saksforhold bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a;1 på måten k, og er videre s;2 et saksforhold som er bygd opp fra gjenstandene i rekken a;2 på den samme måten k, er saksforholdene s;1 og s;2 distinkte dersom a;1 og a;2 også er det.

Ser man på den neste tesen uttrykker den at ethvert saksforhold er bygd opp fra elementene i en eller annen gjenstandssekvens på en eller annen konsti-tusjonsmåte. Denne tesen synes temmelig sikkert å være i overenstemmelse med Wittgensteins intensjoner. I symboler kan den formuleres slik:

T7 (Ax)(xêS –> (En)(Ea)(Ek)(n≥1 & nêNat & aêG^n & kêK & B(x,a,k)))

Den følgende tese synes det også mulig å finne et tekstgrunnlag for i Tractatus. I ord kan tesen formuleres slik: Er x en gjenstand finnes det alltid en gjenstands-sekvens a der x er et ledd i gjenstandssekvensen, en konstitusjonsmåte k og et saksforhold s slik at s er det saksforhold som er bygd opp fra gjenstandene i sekvensen a på måten k. Formulert litt grovere kan tanken uttrykkes slik: Enhver gjenstand i Wittgensteins forstand inngår alltid som en bestandel i et eller annet saksforhold. Det kan altså ikke finnes gjenstander som eksisterer helt isolert fra mengden av saksforhold, med andre ord som ikke inngår i forbindelse med andre ting. I symboler kan denne tanken formuleres slik:

T8 xêG –> (En)(Ea)(n≥1& nêNat & aêG^n & (Ej)(1≤ j ≤n & x= (a);j) &

(Es)(Ek)(sêS & kêK & B(s,a,k)))

Det er nå blitt anført åtte teser som samlet synes å gi en et visst bilde av den grunnleggende ontologiske teori i Tractatus. Spesielt gjelder dette forholdet mellom Wittgensteins gjenstander, saksforhold og den måten saksforhold bygges opp fra gjenstander på.

Hvis man nå går et steg videre synes Wittgenstein å mene at for hvert saksforhold sêS består den mulighet at det kan foreligge eller at det ikke kan foreligge. Virkeligheten eller verden er totaliteten av alle de saksforhold som foreligger. Et saksforhold som foreligger eller består er en kjensgjerning. Verden kan derfor splittes opp i et visst antall kjensgjerninger. Imidlertid er det mulig å å tenke seg verden annerledes enn den faktisk er. Det virker derfor som om Wittgenstein tenker seg at for hver mengde X av saksforhold, der X Inkl S, er det mulig å tenke seg at alle saksforholdene i S består, mens saksforholdene i S – X ikke består.

La oss kalle ethvert par av typen <X,S–X> der X Inkl S for en mulig verdenstilstand. La oss betegne klassen av alle mulige verdenstilstander med V. Da kunne muligens en tanke i Tractatus ånd formuleres slik:

T9 V = Mg(<X,S–X>: X Inkl S)

La oss nå gå videre å se på visse elementer ved Wittgensteins språkteori i Tractatus. Det er mulig å oppfatte Wittgenstein slik at han tenker seg at det finnes et visst idealspråk. I dette idealspråk vil det finnes visse setninger. La oss betegne mengden av alle setninger i idealspråket med "∑". Blandt setningene i idealspråket vil det finnes en bestemt delmengde, de såkalte elementær-setningene. La oss betegne denne mengden av setninger med "E". Det synes ikke uberettiget å tillegge Wittgenstein den tanke at dersom x er en vilkårlig setning i idealspråket så vil det være slik at dersom noen verdenstilstander tenkes realisert så vil x være usann og dersom andre tenkes realisert vil x være sann. Vi betegner mengden av alle par <x,v> der x er en setning i idealspråket, der v er en mulig verdenstilstand og der v er en mulig verdenstilstand som gjør x sann med T. Tilsvarende betegner vi mengden av alle par <x,v> der x er en setning i idealspråket, der v er en mulig verdenstilstand og der v er en mulig verdenstilstand som gjør x usann med F. Man kan nå formulere den følgende tese:

T10 xê∑ –> (Av)(vêV –> (T(x,v) <–> ¬F(x,v)))

Denne tesen er i det vesentlige triviell og sier bare at en setning i idealspråket er sann i en verdenstilstand hvis og bare hvis den ikke er usann i denne verdens-tilstand. Den neste tesen er også triviell:

T11 (T(x,v) v F(x,v)) –> (xê∑ & vêV)

Jeg tror denne setningen knapt skulle trenge noen kommentarer.

Når det gjelder elementærsetningene synes Wittgenstein å tenke seg at disse direkte avbilder saksforhold. En elementærsetning påstår at et saksforhold består eller foreligger. Videre tenker Wittgenstein seg at det finnes en art strukturlikhet mellom de enkelte elementer i en elementærsetning og det saksforhold den avbilder, slik at en elementærsetning kan oppfattes som et bilde eller en logisk modell. Vi skal imidlertid ikke gå nærmere inn på billedteorien i Tractatus her. I stedet vil vi konsentrere oppmerksomheten mot visse andre sider ved elementærsetningene.

Det virker som om Wittgenstein tenker seg at enhver elementærsetning x påstår at et saksforhold s foreligger og at x da er sann i de og nøyaktig de mulige verdenstilstandene hvor s består. Og ikke bare synes han å påstå dette, men også noe sterkere, nemlig at x er en elementærsetning hvis og bare hvis x er en setning og det finnes et saksforhold y slik at mengden av alle de mulige verdenstilstander hvor x er sann er identisk med mengden av alle de verdenstilstander hvor saksforholdet y foreligger. I symboler kan denne tesen formuleres slik:

T12 xêE <–> [xê∑ & (Ey)(yêS & Mg(v: vêV & T(x,v)) = Mg(v: vêV & yê(v);1))]

I forbindelse med T12 er det også naturlig å betrakte den tesen at ethvert saksforhold lar seg avbilde ved en elementærsetning som er sann i nøyaktig de mulige verdenstilstandene hvor saksforholdet består:

T13 (Ay)(yêS –> (Ex)(xêE & Mg(v: vêV & T(x,v)) = Mg(v: vêV & yê(v);1)))

Helt tilslutt vil vi se på nok noen mulig teser. Fra T10 følger det at enhver setning kan tilordnes en klasse med mulige verdenstilstander, nemlig alle de verdenstilstandene der setningen er sann. Er det omvendte tilfelle? Er det med andre ord slik at vi til enhver mengde med verdenstilstander kan finne en setning x som er sann i nøyaktig disse, og bare disse, verdenstilstandene? Igjen kan man vel ikke i Tractatus finne noe som direkte bekrefter dette. På den annen side synes det heller ikke å være noe som direkte står i strid med det, og et positivt svar på spørsmålet synes å passe sammen med andre tanker i Tractatus. I alle tilfelle kan det være av interesse å formulere tanken eksplisitt og vi gjør det slik:

T14 X Inkl V –> (Ex)(xê∑ & X = Mg(v: vêV & T(x,v)))

Er X altså en klasse med mulige verdenstilstander så finnes det alltid en setning x i idealspråket som er slik at mengden av alle de mulige verdenstilstander som gjør x sann er identisk med X.

I Tractatus fremsettes den tesen at alle setninger er sannhetsfunksjoner av elementærsetninger. Det er ikke spesielt klart hvordan denne tesen skal forstås. Det kan imidlertid være lov å forsøke seg med en mulig tolkning.

La X være en ikke-tom mengde av setninger i idealspråket. Det er da mulig at man kunne tenke seg at det alltid i idealspråket finnes en entydig bestemt setning, Sh(X), som er sann i en verdenstilstand v hvis og bare hvis alle setningene i X er usanne i v. Man ser at Sh da er analog med den vanlige Sheffer-streken, men at det her dreier seg om en operasjon som kan virke på en hvilken som helst mengde av setninger hva enten den inneholder endelig mange elementer eller uendelig mange. De følgende to teser uttrykker den tanke at det finnes en slik operasjon over klassen av setninger i idealspråket:

T15 Sh: Pt(∑)-{ø} –> ∑
T16 (Av)(vêV –> (T(Sh(X),v) <–> (Ax)(xêX –> F(x,v))))

Tesen om at alle setninger er sannhetsfunksjoner av elementærsetninger kunne da ifølge den tolkning vi her har i tankene sies å innebære at klassen av alle setninger i idealspråket er den minste mengden som inneholder (i) alle elementærsetningene og som (ii) for enhver ikke-tom mengde med setninger X inneholder Sh(X). Den følgende formel uttrykker denne tanken:

T17 zê∑ <–> (Ay)(E Inkl y & (Ax)(ø≠xêPt(y) –> Sh(x)êy) &zêy)

Vi har nå formulert sytten teser som uttrykker visse tanker som det kan virke nærliggende å trekke frem når man leser Tractatus. Men la oss fremsette visse forbehold. Disse tesene kan i høyden pretendere å gi en visse grunntrekk i den filosofi som presenteres av den tidlige Wittgenstein. For det andre er det klart at tesene har et klart preg av forenklet rekonstruksjon.

Det vi nå ønsker å gjøre er å undersøke nærmere teorien T1 – T17. Vi vil forsøke å relatere den til teorien E;3 som vi tidligere har formulert. La oss først gi den følgende definisjon:

Definisjon 1. Med en Tractatus-ontologi forstås et fire-tuple <G,S,K,B> der G,S,K er mengder og B er en ternær relasjon og der G,S,K og B oppfyller kravene T1 – T8.

Merk at dette er en definisjon av en bestemt klasse av abstrakte mengde-teoretiske strukturer. Enhver struktur <G,S,K,B> som oppfyller kravene i definisjonen vil være en Tractatus-ontologi. Det bør også bemerkes at det ikke er noe som forhindrer at det kan finnes uendelig mange distinkte fire-tupler som oppfyller kravene i definisjonen.

I samme ånd gir vi nå den følgende definisjon:

Definisjon 2. Med en forenklet Tractatus-modell forstås et ni-tuple <G,S,K,B,∑,E,V,T,F,Sh> som oppfyller de følgende krav:

(i) <G,S,K,B> er en Tractatus-ontologi, dvs. at G,S,K er mengder og B er en relasjon som oppfyller kravene T1 – T8

(ii) ∑,E,V er mengder, T,F to binære relasjoner og Sh en funksjon som oppfyller kravene T9 – T17

Man ser at klassen av forenklede Tractatus-modeller er en klasse av nokså kompliserte strukturer. I praksis er det imidlertid ikke så vanskelig å arbeide med dem.

Vi vil å vise en rekke resultater som forbinder begrepene Tractatus-modell og Tractatus-ontologi til begreper som vi tidligere har innført i forbindelse med teoriene om presise deskriptive utsagn og egenskaper. Særlig vil vi studere sammenhengen mellom klassen av Tractatus-modeller og en bestemt type av begrepsrammer som vi litt senere vil avgrense nærmere.

Først vil vi imidlertid gi en alternativ definisjon av mengden av Tractatus-ontologier:

Definisjon 3. Med en T-struktur forstås et fire-tuple <G,S,K,f> som oppfyller de følgende krav:

(a) G≠ø & S≠ø & K≠ø
(b) Func(f) & Dom(f) = K & (Ak)(kêK –> Func(f(k)) &
(Ak)(kêK –> (En)(n≥1 & nêNat & ø≠Dom(f(k)) Inkl G^n &
Rgn(f(k)) Inkl S))
(c) (Ak;1)(Ak;2)(k;1,k;2êK & k;1≠k;2.–> Rgn(f(k;1)) **Ω** Rgn(f(k;2)) =ø)
(d) (Ax)(xêS –> (Ek)(kêK & xêRgn(f(k)))
(e) (Ax)(xêG –> (En)(Ej)(Ez)(n,jêNat & 1≤j≤n & zêG^n & x=(z);j &
zêUN/kêK/(Dom(f(k)))))
(f) (Ak)(kêK –> f;k: Dom(f;k) –(1-1)–> Rgn(f;k))

Vi vil etterhvert gi bevis for det følgende teorem som viser nøyaktig hvordan Tractatus-ontologier er relatert til T-strukturer:

Teorem 1

(A) Anta <G,S,K,B> er en Tractatus-ontologi. Sett per definisjon:
f = Mg(<k, Mg(<a,s>: B(s,a,k))>: kêK). Da er <G,S,K,f> en T-struktur.

(B) Anta <G,S,K,f> er en T-struktur og sett per definisjon:
B = Mg(<s,a,k>: (En)(nêNat & n≥1 & aêG^n & kêK & sêS &
Dom(f(k)) Inkl G^n & s=f(k)‘a))
Da er <G,S,K,B> en Tractatus-ontologi.

I det følgende ønsker vi å belyse sammenhengen mellom Tractatus-ontologier og Tractatus-modeller på den ene side og visse klasser av begrepsrammer på den andre side. Dette krever at vi gjør rede for begrepet begrepsramme.

La D være en eller annen ikke-tom mengde. Med et n-ært attributt (n≥1) over mengden D forstår vi en funksjon i mengden (2^I)^(D^n). Med andre ord er et n-ært attributt en funksjon som til ethvert n-tuple av objekter hentet fra D tilordner dette en funksjon i mengden 2^I. I det følgende betegner vi 2^I med "U", og kaller de elementer som inngår i denne mengden for utsagn. Er x et utsagn betegner "µ(x)" mengden av alle de mulige verdener wêI der man har x(w)=1. Vi kaller µ(x) for sannhetsmengden til utsagnet x.

Er X og Y to mengder setter vi per definisjon:
c(X,Y) = Mg(<x,1>: xêXΩY)UMg(<x,0>: xêY–X).
Vi kaller c(X,Y) for den karakteristiske funksjonen til X med hensyn på mengden Y. Man ser at c(X,Y) er en funksjon som tilordner ethvert element i Y som er med i X verdien 1, og som videre tilordner ethvert element i Y som ikke er med i X verdien 0. Har man at X er en delmengde av I følger det at c(X,I)ê2^I, med andre ord vil da c(X,I) være et utsagn.

Med en karakteristisk funksjon over mengden X mener vi en funksjon der domenet er X og hvor verdiområdet er {0,1}, med andre ord en funksjon i klassen 2^X. Er X en karakteristisk funksjon over mengden Y bruker vi
"c;-1(X,Y)" for å betegne mengden av de zêY der vi har X(z)=1.

Med en begrepsramme over D forstås en funksjon ß hvor domenet er mengden av de naturlige tall Nat og som ellers oppfyller de følgende krav:

(i) ß(0) Inkl (2^I)
(ii) (An)(nêNat & n≥1 –> ß(n) Inkl (2^I)^(D^n))
(iii) UN(Mg(ß(n): nêNat & n≥1)) ≠ ø

Man ser altså at en begrepsramme er en funksjon som til ethvert naturlig tall n ≥1 tilordner n en mengde (muligens tom) av n-ære attributter og som til tallet 0 tilordner dette en mengde av utsagn.

La ß være en begrepsramme over domenet D. Med mengden av instanser over ß, In(ß), forstår vi mengden av alle de utsagn x der vi har at det finnes noe nêNat & n≥1 og zêD^n slik at x =a(z) for et eller annet n-ært attributt aêß(n). Er forøvrig a et n-ært attributt over mengden D og <x;1,...,x;n>êD^n kaller vi utsagnet a(x;1,...,x;n) for en instans av attributtet a.

Vi har nå redegjort for de begrepsdannelsene vi trenger. I det følgende vil vi vise visse teoremer som belyser sammenhengen mellom Tractatus-ontologier, T-strukturer og en spesiell type begrepsrammer, de såkalte Tractatus-rammer. Begrepsrammene av den sistnevnte type er definert slik:

Definisjon 4 Med en Tractatus-ramme over domenet D forstås en begrepsramme ß over domenet D som oppfyller de følgende krav:

(1) ß(0)=ø & (An)(Ax)(nêNat & n≥1 & xêß(n) –>
(Ea)(ø≠ a Inkl D^n & Rest(x,a): a –(1-1)–> (2^I) &
(Az)(zêa –> Cons({µ;-1(Mg(w: Rest(x,a)(z)‘w=1 &wêI))})) &
(Az)(zê(D^n – a) –> x(z) = c(ø,I))))

(2) For alle m,nêNat der m,n≥1 gjelder det at dersom xêß(n) og yêß(m) og x≠y så har man at Rgn(x)ΩRgn(y) = {c(ø,I)}.

(3) SInd(In(ß) – {µ;-1(ø)})

(4) U = C(In(ß) – {µ;-1(ø)})

Tractatus-rammer har en spesiell interesse fordi det klart følger fra definisjonen av en slik begrepsramme at om slike rammer eksisterer så finnes det også en utsagnsmengde Δ slik at Δ er en strengt uavhengig utsagnsmengde og hvor Δ dessuten er slik at ethvert utsagn er med i den minste utsagnsmengden som inneholder Δ og som er lukket under uendelig konjunksjon og negasjon. I symboler: (EΔ)(SInd(Δ) & U = C(Δ))[6]. Ved nærmere inspeksjon ser man at dette følger fra de to siste klausulene i definisjonen ovenfor.

Teorem 2 Anta <G,S,K,f> er en T-struktur. Anta *f*: I –(1-1,på)–> Pt(S) og anta at G Inkl D. Definer for hvert kêK:
E;k = Mg(<a, c(Mg(w: wêI & f(k)‘aê*f*(w)),I)>: aêDom(f(k))) U
Mg(<a,c(ø,I)>: aê(D^g(k) – Dom(f(k)))
der g(k) = (in)(nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n)
Definer videre:
∂;n = Mg(k: kêK &Dom(f(k)) Inkl D^n) for n≥1 & nêNat
og la tilslutt ß;T være slik at ß;T(0) =ø og ß;T(n) = Mg(E;k: kê∂;n) om 0<n. Da har man at ß;T er en Tractatus-ramme over domenet D.

Man bør bemerke følgende. Anta <G,S,K,f> er en T-struktur. Da har man om kêK at f(k) er en funksjon og at domenet til f(k) er inkludert i G^n for noe naturlig tall n der n≥1. I denne forbindelse kan man konsultere kravet (b) i definisjonen av T-struktur. Dette tallet n er imidlertid entydig bestemt. For er n,mêNat og n≠m vil G^n og G^m være disjunkte. Det er da klart at domenet til f(k) ikke kan være inkludert i begge disse mengdene.

Dette teoremet har stor interesse fordi det viser nøyaktig hvordan Tractatus-ontologier via T-strukturer er relatert til den spesielle klassen av begrepsrammer som vi har avgrenset ovenfor. Gitt en Tractatus-ontologi kan vi i lys av Teorem 1 konstruere en T-struktur som er relatert til ontologien på en naturlig måte. Har vi så for oss en T-struktur viser Teorem 2 oss hvordan vi kan forbinde T-strukturen med en Tractatus-ramme. Vi kan også bevise en form for omvending av Teorem 2 som viser hvordan man på en naturlig måte kan konstruere en T-struktur gitt en Tractatus-ramme:

Teorem 3 Anta ß er en Tractatus-ramme over domenet D. Definer K,f,G og S på den følgende måte:

(1) K = UN/nêNat/ß(n)

(2) f(x) = Rest(x, Mg(y: yêDom(x) & x(y)≠c(ø,I))) om xêK

(3) G = Mg(z: zêD & (En)(Ej)(Ey)(Ea)(n,jêNat & 1≤j≤n &
yêD^n & aêß(n) & z = (y);j & a(y)≠c(ø,I)))

(4) S = UN/xêK/(Rgn(f(x)))

---

[6] C(Δ) er formelt sett definert slik:
C(Δ)= SN(Mg(X: XêPt(U) & (Ay)(yêX –> Neg(y)êX) & (Az)(zêPt(X) –> SNu(z)êX)))

Da er <G,S,K,f> en T-struktur.

Teorem 1 – 3 viser bare at gitt en viss Tractatus-ramme så kan en T-struktur konstrueres og omvendt, samt at hvis en Tractatus-ontologi er gitt så kan også en T-struktur konstrueres på en bestemt måte. Selvom disse teoremene er interessante og åpenbart viser en viss sammenheng mellom de forskjellige struktur- og begrepsramme-klasser vi har definert bør likevel disse sammen-hengene karakteriseres nøyere.

Vi ønsker nå å vise de følgende ting: For det første at det er mulig å innføre et naturlig isomorfibegrep over klassen av T-strukturer som inndeler denne klassen i ekvivalensklasser. For det andre at det er mulig å innføre en naturlig isomorfi-relasjon mellom klassen av T-strukturer og klassen av Tractatus-rammer, dvs. at det er mulig å gi en naturlig definisjon av når en T-struktur kan sies å være isomorf med en Tractatus-ramme. For det tredje at det er mulig å innføre en naturlig isomorfi-relasjon over klassen av Tractatus-rammer som inndeler denne i ekvivalensklasser. For det fjerde ønsker vi å vise at dersom <G,S,K,f> er en T-struktur og ß;T konstrueres som i Teorem 2 så er <G,S,K,f> isomorf med ß;T. For det femte vil vi vise at dersom ß er en Tractatus-ramme og <G,S,K,f> konstrueres som i Teorem 3 så er <G,S,K,f> isomorf med ß. Endelig ønsker vi å vise at dersom <G,S,K,f> er en T-struktur og ß;T konstrueres som i Teorem 2 og <G',S',K',f'> konstrueres som i Teorem 3 fra ß;T så er <G,S,K,f> isomorf med <G',S',K',f'>. For å underbygge de tre første påstandene innfører vi de følgende isomorfi-begreper:

Definisjon 5 Anta <G,S,K,f> og <G',S',K',f'> er to T-strukturer. Da er de to strukturene isomorfe hvis og bare hvis det følgende er tilfelle:

Det finnes funksjoner ∂;1,∂;2 og ∂;3 som oppfyller følgende krav:

(i) ∂;1: G –(1-1,på) –>G'
∂;2: S –(1-1,på) –>S'
∂;3: K –(1-1,på) –>K'

(ii) Er kêK & n≥1 & nêNat har man
(a) Dom(f(k)) Inkl G^n <–> Dom(f'(∂;3(k))) Inkl G^n og
(b) <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(f'(∂;3(k)))
for alle x;1,...,x;nêG

(iii) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(f'(∂;3(k))

(iv) Er kêK & n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = f'(∂;3(k))(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n)) for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,...,x;n>êDom(f(k))

Man ser nokså lett at denne isomorfi-relasjonen er en ekvivalensrelasjon som inndeler klassen av T-strukturer i innbyrdes disjunkte, ikke-tomme ekvivalensklasser som samlet uttømmer klassen av T-strukturer. Den er selvfølgelig også helt analog med lignende isomorfi-relasjoner man finner eksempler på i algebraen og mengdelæren.

Definisjon 6 En T-struktur <G,S,K,f> er isomorf med en Tractatus-ramme ß over domenet D hvis og bare hvis det følgende er tilfelle:

Det finnes avbildninger ∂;1, ∂;2 og ∂;3 som oppfyller følgende krav:

(i) ∂;1: G –(1-1,på) –>D
∂;2: S –(1-1,på) –>In(ß) – {c(ø,I)}
∂;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß(n))

(ii) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;3(k)êß(n)

(iii) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:
∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(iv) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(v) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;3(k)) –{c(ø,I)}

Merk at den isomorfi-relasjonen som er definert her ikke er en relasjon over en bestemt klasse av strukturer, men forbinder elementene i to forskjellige klasser, ie. klassen av T-strukturer og klassen av Tractatus-rammer.

Tilslutt definerer vi:

Definisjon 7 Anta ß;1 og ß;2 er to Tractatus-rammer over henholdsvis D og D'. Da er de to rammene isomorfe hvis og bare hvis det følgende er tilfelle:

Det finnes funksjoner ∂;1,∂;2 og ∂;3 som oppfyller de følgende krav:
(i) ∂;1: D –(1-1,på) –>D'
∂;2: UN/nêNat/(ß;1(n)) –(1-1,på) –>UN/nêNat/(ß;2(n))
∂;3: In(ß;1)U{c(ø,I)} –(1-1,på) –> In(ß;2)U{c(ø,I)}
(ii) (An)(nêNat –> (Ax)(xêß;1(n) –> ∂;2(x)êß;2(n))) & ∂;3(c(ø,I)) = c(ø,I)
(iii) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man
<x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;2(x))
for alle x;1,....,x;nêD
(iv) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man ∂;3"Rgn(x) = Rgn(∂;2(x))
(v) Er aêß;1(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD, så gjelder:
∂;3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) = µ;-1(c;-1(∂;2(a)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n)),I))

Defineres isomorfi mellom Tractatus-rammer på denne måten ser man lett at relasjonen er en ekvivalensrelasjon. Den inndeler derfor denne klassen av rammer i innbyrdes disjunkte ekvivalensklasser. Det bør bemerkes at den isomorfi-relasjonen som er definert ved Definisjon 6 er av en noe annen karakter en de to relasjonene som er innført ved Definisjon 5 og Definisjon 7.

Vi har ovenfor definert hva som menes med en Tractatus-ramme over domenet D. Men en Tractatus-ramme forstår vi en Tractatus–ramme over et eller annet domene.

Det følgende teorem gir en oppsummering av de viktigste egenskapene til de isomorfi-relasjonene som er innført:

Teorem 4

(a) Anta ß;1, ß;2 og ß;3 er Tractatus-rammer. Da gjelder: (i) Er ß;1 isomorf med ß;2 og ß;2 isomorf med ß;3 så er ß;1 isomorf med ß;3. (ii) Er ß;1 isomorf med ß;2 så er ß;2 isomorf med ß;1. (iii) ß;1 er isomorf med seg selv.

(b) Anta t;1, t;2 og t;3 er T-strukturer. Da gjelder: (i) Er t;1 isomorf med t;2 og t;2 isomorf med t;3 så er t;1 isomorf med t;3. (ii) Er t;1 isomorf med t;2 så er t;2 isomorf med t;1. (iii) t;1 er isomorf med seg selv.

(c) Anta ß;1 og ß;2 er to Tractatus-rammer og t en T-struktur. Anta ß;1 er isomorf med ß;2 og t er isomorf med ß;1. Da er t isomorf med ß;2.

(d) Anta ß;1 og ß;2 er to Tractatus-rammer og t en T-struktur. Anta t er isomorf med ß;1 og t er isomorf med ß;2. Da er ß;1 isomorf med ß;2.

(e) Anta t;1 og t;2 er to T-strukturer og ß en Tractatus-ramme. Anta t;1 er isomorf med ß og t;2 er isomorf med ß. Da er t;1 isomorf med t;2.

(f) Anta t;1 og t;2 er to T-strukturer og ß en Tractatus-ramme. Anta t;1 er isomorf med ß og t;1 er isomorf med t;2. Da er t;2 isomorf med ß.

Figuren ovenfor kan tjene til å anskueliggjøre innholdet i de fire siste punktene i Teorem 4. På figuren representerer den øverste sirkelen i hver figur klassen av Tractatus-rammer, den nederste sirkelen i hver figur representerer klassen av T-strukturer. Et punkt innenfor en sirkel representerer en vilkårlig fiksert struktur i den mengden av strukturer som den omgivende sirkel representerer. En pil fra et punkt til et annet representerer det forhold at den strukturen pilen peker fra er isomorf med den strukturen pilen peker mot.

Ovenfor ble også de følgende to teoremer nevnt. Vi skriver dem nå ned helt eksplisitt:

Teorem 5 Anta <G,S,K,f> er en T-struktur. Anta *f*: I –(1-1,på)–> Pt(S) og anta at G = D. Definer for hvert kêK:
E;k = Mg(<a, c(Mg(w: wêI & f(k)‘aê*f*(w)),I)>: aêDom(f(k))) U
Mg(<a,c(ø,I)>: aê(D^g(k) – Dom(f(k)))
der g(k) = (in)(nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n)
Definer videre:
∂;n = Mg(k: Dom(f(k)) Inkl D^n) for n≥1 & nêNat
og la tilslutt ß;T være slik at ß;T(0) =ø og ß;T(n) = Mg(E;k: kê*∂*;n) om 0<n. Da har man at ß;T er en Tractatus-ramme over D og at <G,S,K,f> er isomorf med ß;T

Teorem 6 Anta ß er en Tractatus-ramme over D. Anta man har:
(Az)(zêD –> (En)(Ej)(Ey)(Ea)(n,jêNat & 1≤j≤n &
yêD^n & aêß(n) & z = (y);j & a(y)≠c(ø,I)))
Definer K,f,G og S på den følgende måte:
(1) K = UN/nêNat/ß(n)
(2) f(x) = Rest(x, Mg(y: yêDom(x) & x(y)≠c(ø,I))) om xêK
(3) G = Mg(z: zêD & (En)(Ej)(Ey)(Ea)(n,jêNat & 1≤j≤n &
yêD^n & aêß(n) & z = (y);j & a(y)≠c(ø,I)))
(4) S = UN/xêK/(Rgn(f(x)))
Da er <G,S,K,f> en T-struktur og det er slik at <G,S,K,f> er isomorf med ß.

Vi har nå gjort rede for endel viktige begrepsdannelser og resultater. Det gjenstår imidlertid å gi bevis for de teoremene vi har nevnt. Dette vil vi gjøre nå.

Bevis for Teorem 1: (A) Anta (1) <G,S,K,B> er en Tractatus-ontologi. Anta videre at (2) f = Mg(<k, Mg(<a,s>: B(s,a,k))>: kêK). Vi ønsker da å vise at <G,S,K,f> oppfyller kravene til en T-struktur slik de er formulert i Definisjon 3.

(a) Siden <G,S,K,B> er en Tractatus-ontologi følger det umiddelbart fra Definisjon 1 at G≠ø & S≠ø & K≠ø. <G,S,K,f> oppfyller derfor åpenbart det første kravet som stilles til en T-struktur.

(b) Vi må vise at f er en funksjon. Anta derfor at <x,y;1>,<x,y;2>êf. I lys av (2) finnes det da k;1,k;2êK slik at

<x,y;1> = <k;1, Mg(<a,s>: B(s,a,k;1))>
<x,y;2> = <k;2, Mg(<a,s>: B(s,a,k;2))>

Herav følger at k;1= x = k;2 og derfor at

y;1 = Mg(<a,s>: B(s,a,k;1)) = Mg(<a,s>: B(s,a,k;2)) = y;2

Det følger fra dette at f er en funksjon ie. man har

(i) Func(f).

Vi må også vise at Dom(f) = K. Anta derfor for vilkårlig x at xêDom(f). Da har man per definisjon at det finnes y slik at <x,y>êf. Det følger da ved hjelp av (2) at det finnes en kêK slik at <x,y> = <k, Mg(<a,s>: B(s,a,k))>. Det følger at x=kêK. Dette viser at Dom(f) Inkl K. Anta på den annen side for vilkårlig k at kêK. Siden man har at det finnes y der y = Mg(<a,s>: B(s,a,k)) følger det ved hjelp av definisjonen av f at <k,y>êf, og derfor at (Ey) (<k,y>êf). Dette impliserer

(ii) Dom(f) = K

Anta nå for vilkårlig k at kêK. Ved hjelp av (2) har man da:

(3) f(k) = Mg(<a,s>: B(s,a,k))

Vi ønsker å vise at f(k) er en funksjon. Anta derfor for vilkårlige x,y;1, y;2 at <x,y;1>, <x,y;2>êf(k). I lys av (3) finnes det a1,a2, s1 og s2 slik at

(4) <x,y;1> = <a1,s1> & B(s1,a1,k)
(5) <x,y;2> = <a2,s2> & B(s2,a2,k)

Fra dette følger a1 = x = a2 og derfor at man har (6) B(s1,a1,k) & B(s2,a1,k). Siden kêK følger fra (6) og kravet T3 til en Tractatus-ontologi at s1 = s2. Dette, (4) og (5) impliserer y;1 = y;2. Det følger at Func(f(k)). Siden k var vilkårlig har vi derfor vist:

(iii) (Ak)(kêK –> Func(f(k)))

Anta igjen at k er et vilkårlig element i K. Da følger det ved hjelp av kravet T4 i definisjonen av en Tractatus-ontologi at

(7) (As)(Aa)(B(s,a,k) –> (En)(nêNat & n≥1 & aêG^n))

Anta nå for vilkårlig x at xêDom(f(k)). Vi har f(k) = Mg(<a,s>: B(s,a,k)). Det må finnes y slik at <x,y>êf(k). Det følger da at det må finnes s1,a1 slik at

(8) <x,y> = <a1,s1> & B(s1,a1,k)

Fra (7) og (8) følger det videre at det finnes n0 slik at

(9) 1≤n0êNat & a1êG^(n0). Det følger derfor at x= a1êG^(n0). Vi vil nå vise at Dom(f(k)) Inkl G^(n0). Anta derfor for vilkårlig y at yêDom(f(k)). Da finnes det z slik at <y,z>êf(k). Siden f(k) = Mg(<a,s>: B(s,a,k)) må det finnes a2, s2 slik at <y,z> = <a2,s2> & B(s2,a2,k). Det følger fra dette og (8) i lys av kravet T4 at det finnes n1 der 1≤n1êNat & a1,a2êG^(n1). Vi har derfor at a1êG^(n0) og dessuten at a1êG^(n1). Er n1≠n0 har man G^(n0)ΩG^(n1)=ø.[7] Det følger at n0=n1 og derfor at a2êG^n0. Men y=a2. Derfor yêG^(n0). Nå var y et vilkårlig element i Dom(f(k)). Vi har derfor Dom(f(k)) Inkl G^(n0). Men 1≤n0êNat. Det følger at (En)(1≤nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n). Men x var et vilkårlig element i Dom(f(k)) og kêK. Det følger at vi derfor har vist:

kêK –> (Ax)(xêDom(f(k)) –> (En)(1≤nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n))

Dette er imidlertid ekvivalent med:

kêK –>. Dom(f(k))≠ø –> (En)(1≤nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n)

Er imidlertid Dom(f(k)) =ø har vi ø Inkl G^n for alle n≥1 & nêNat. Også i dette tilfelle har vi derfor (En)(1≤nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n). Det følger at vi har vist:

---

[7] Man bør her huske på at G^(n0) er klassen av alle funksjoner som har n0 som domene og sitt verdiområde inkludert i G. Er n1 forskjellig fra n0 vil funksjonene i G^(n1) ha et domene som er distinkt fra de funksjonene som er med i G^(n0). Dette innebærer at intet element i G^(n0) i så fall kan være identisk med noe element i G^(n1).

(iv) (Ak)(kêK –> (En)(1≤nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n))

Anta igjen at kêK for vilkårlig k. Vi ønsker å vise at Rgn(f(k)) Inkl S. Anta derfor for vilkårlig x at xêRgn(f(k)). Da må det finnes y slik at <y,x>êf(k). I lys av definisjonen av f må det i så fall finnes a1 og s1 slik at

<y,x> = <a1,s1> & B(s1,a1,k).

Fra dette og T2 følger s1êS. Det følger også åpenbart at x=s1. Vi har derfor xêS. Siden x var et vilkårlig element i Rgn(f(k)) og k var et vilkårlig element i K har vi derfor vist:

(v) (Ak)(kêK –> Rgn(f(k)) Inkl S)

Fra (i) – (v) fremgår det at <G,S,K,f> oppfyller det andre kravet i definisjonen av en T-struktur.

(c) Anta k;1,k;2êK & k;1≠k;2. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes x0 der x0êRgn(f(k;1)) & x0êRgn(f(k;2)). I lys av definisjonen av f har man

(1.1) f(k;1) = Mg(<a,s>: B(s,a,k;1)

(1.2) f(k;2) = Mg(<a,s>: B(s,a,k;2)

Siden x0êRgn(f(k;1))ΩRgn(f(k;2)) må det finnes z1,z2 slik at <z1,x0>êf(k;1) og <z2,x0>êf(k;2). Fra dette, (1.1) og (1.2) følger det at det må finnes a1,s1,a2,s2 der

(2) <z1,x0> = <a1,s1> & <z2,x0> = <a2,s2> og

(3) B(s1,a1,k;1) & B(s2,a2,k;2)

Fra (2) følger (4) s1=x0=s2. Men fra (3), k;1≠k;2 og kravet T5 følger s1≠s2 som åpenbart strider mot (4). Det følger at antagelsen at det finnes x0 der x0êRgn(f(k;1))ΩRgn(f(k;2)) leder til en motsigelse. Dette viser at <G,S,K,f> også oppfyller det tredje kravet i definisjonen av en T-struktur.

(d) Anta for vilkårlig x at xêS. I lys av at <G,S,K,B> er en Tractatus-ontologi følger at komponentene oppfyller kravet T7. Siden xêS må det derfor finnes n,a,k slik at

(1) 1≤nêNat & aêG^n & kêK & B(x,a,k)

I lys av definisjonen av f følger det da at <a,x>êf(k), og derfor at (Ey)(<y,x>êf(k)). Herav følger så xêRgn(f(k)). Dette viser at <G,S,K,f> også oppfyller det fjerde kravet i definisjonen av en T-struktur.

(e) Anta for vilkårlig x at xêG. I lys av T8 finnes det da n,j,a,s og k slik at

(1) aêG^n & 1≤j≤n & j,nêNat & x= (a);j & sêS & kêK & B(s,a,k). Da har man i lys av definisjonen av f(k) at <a,s>êf(k) og derfor at aêDom(f(k)). Det følger derfor at aêUN/kêK/(Dom(f(k)). Sammen med (1) impliserer imidlertid dette at

(En)(Ej)(Ez)(n,jêNat & 1≤j≤n & zêG^n & x=(z);j &
zêUN/kêK/(Dom(f(k)))))

Dette viser at <G,S,K,f> også oppfyller det femte kravet i definisjonen av en T-struktur.

(f) Anta kêK for vilkårlig k. For å vise at <G,S,K,f> oppfyller det sjette kravet i definisjonen av T-struktur er det tilstrekkelig å vise at

<x1,y>êf(k) & <x2,y>êf(k) –> x1=x2 for alle x1,x2,y. Anta derfor for vilkårlige x1,x2,y at <x1,y>êf(k) & <x2,y>êf(k). Siden f(k) = Mg(<a,s>: B(s,a,k)) følger det at B(y,x1,k) & B(y,x2,k). Siden kêK har man fra dette og kravet T6 at x1=x2. Dette er hva vi ønsker.

Vi har nå levert et fullstendig bevis for den første halvdelen av Teorem 1.

(B) Vi tar nå for oss den andre halvdelen av Teorem 1. Anta

(1) <G,S,K,f> er en T-struktur

og dessuten at
(2) B = Mg(<s,a,k>: (En)(nêNat & n≥1 & aêG^n & kêK & sêS &
Dom(f(k)) Inkl G^n & s=f(k)‘a))
Vi ønsker da å vise at <G,S,K,B> er en Tractatus-ontologi, dvs. at <G,S,K,B> oppfyller kravene T1 – T8.

Siden <G,S,K,f> er en T-struktur følger det umiddelbart ved hjelp av Definisjon 3 at G≠ø & S≠ø & K≠ø. <G,S,K,B> oppfyller derfor kravet T1.

Fra (2) følger umiddelbart at dersom B(s,a,k) så har man sêS & (En)(nêNat & n≥1 & aêG^n) & kêK. Med andre ord ser man at <G,S,K,B> også oppfyller kravet T2.

La oss vise at <G,S,K,B> oppfyller kravet T3. Anta
(3) kêK & B(s;1,a,k) & B(s;2,a,k)
Fra (2) og (3) følger det at det finnes n1 og n2 der man har:
(4) n1êNat & n1≥1 & aêG^(n1) & kêK & s;1êS &
Dom(f(k)) Inkl G^(n1) & s;1=f(k)‘a
og
(5) n2êNat & n2≥1 & aêG^(n2) & kêK & s;2êS &
Dom(f(k)) Inkl G^(n2) & s;2=f(k)‘a
Fra (4) og (5) ser man at s;1 = f(k)‘a = s;2 som er det vi ønsker. Dette viser at <G,S,K,B> også oppfyller kravet T3.

Anta nå (6) kêK & B(s1,a1,k) & B(s2,a2,k). Ved hjelp av (2) følger da eksistensen av n1,n2 slik at
(7) n1êNat & n1≥1 & a1êG^(n1) & kêK & s;1êS &
Dom(f(k)) Inkl G^(n1) & s;1=f(k)‘a1
og (8) n2êNat & n2≥1 & a2êG^(n2) & kêK & s;2êS &
Dom(f(k)) Inkl G^(n2) & s;2=f(k)‘a2
Fra (7) og (8) følger naturligvis s;1=f(k)‘a1 og s;2=f(k)‘a2. Dette impliserer at a1,a2êDom(f(k)). Fra dette (7) og (8) følger a1êG^(n1) & a1êG^(n2). Men er n1≠n2 har man G^(n1)ΩG^(n2)=ø. Derfor n1=n2. Det følger da
a1,a2êDom(f(k)) Inkl G^(n1). Men fra dette kan man slutte (En)(n≥1 & nêNat & a1,a2êG^n). Dette viser at strukturen <G,S,K,B> også oppfyller kravet T4.

Anta nå (9) B(s;1,a;1,k;1) & B(s;2,a;2,k;2) & k;1≠k;2. Da har vi i lys av definisjonen av B at det finnes n1,n2 slik at:
(10) n1êNat & n1≥1 & a1êG^(n1) & k;1êK & s;1êS &
Dom(f(k)) Inkl G^(n1) & s;1=f(k;1)‘a1
og (11) n2êNat & n2≥1 & a2êG^(n2) & k;2êK & s;2êS &
Dom(f(k)) Inkl G^(n2) & s;2=f(k;2)‘a2
Vi ønsker nå å vise at s;1≠s;2. Fra (10) og (11) følger
<a1,s;1>êf(k;1) &<a2,s;2>êf(k;2). Vi har derfor s;1êRgn(f(k;1)) og dessuten at s;2êRgn(f(k;2)). Men siden <G,S,K,f> er en T-struktur og k;1,k;2êK & k;1≠k;2 har vi da i lys av Definisjon 3 at Rgn(f(k;1))ΩRgn(f(k;2)) =ø. Det følger at s;1≠s;2. Dette viser at <G,S,K,B> også oppfyller kravet T5.

Anta nå at (12) kêK & B(s;1,a1,k) & B(s;2,a2,k) & a1≠a2. Igjen følger ved hjelp av (2) at
(13) n1êNat & n1≥1 & a1êG^(n1) & kêK & s;1êS &
Dom(f(k)) Inkl G^(n1) & s;1=f(k)‘a1
og (14) n2êNat & n2≥1 & a2êG^(n2) & kêK & s;2êS &
Dom(f(k)) Inkl G^(n2) & s;2=f(k)‘a2
Fra (13) og (14) følger s;1=f(k)‘a1 & s;2=f(k)‘a2. Siden kêK har man i lys av definisjonen

av T-struktur at

(15) f;k: Dom(f;k) –(1-1)–> Rgn(f;k)

Nå er a1,a2êDom(f(k)) & a1≠a2. I lys av (15) må man derfor ha s1≠s2. Dette er hva vi ønsker. Dette viser at <G,S,K,B> også oppfyller kravet T6.

Anta nå for vilkårlig x at xêS. Siden <G,S,K,f> er en T-struktur følger ved hjelp av Definisjon 3, klausul (d), at det finnes k der (16) kêK & xêRgn(f(k)). Fra (16) følger at det finnes a slik at (17) x = f(k)‘a. Nå har man, igjen siden <G,S,K,f> er en T-struktur og kêK, at det finnes n slik at

(18) n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n & Rgn(f(k)) Inkl S

Siden kêK følger fra (17), (18) og det at xêS at

(19) nêNat & n≥1 & aêG^n & kêK & xêS & Dom(f(k)) Inkl G^n & x=f(k)‘a

Dette innebærer i lys av (2) at B(x,a,k). Vi må derfor ha:

(En)(Ea)(Ek)(n≥1 & nêNat & aêG^n & kêK & B(x,a,k))

Siden x var et vilkårlig objekt i S følger det at <G,S,K,B> også oppfyller kravet T7.

Det gjenstår nå bare et krav som vi må vise at <G,S,K,B> må oppfylle, nemlig kravet T8. Anta derfor for vilkårlig x at xêG. I lys av klausul (e) i definisjonen av T-struktur følger da eksistensen av n,j,z og k slik at

(20) n,jêNat & 1≤j≤n & zêG^n & x=(z);j & kêK & zêDom(f(k))

Siden zêDom(f(k)) følger det at det finnes s slik at (21) s=f(k)‘z og der (22) sêS. I lys av definisjonen av B og (20) – (22) følger B(s,z,k). Dette sammen med (20)–(22) impliserer:

(En)(Ea)(n≥1& nêNat & aêG^n & (Ej)(1≤ j ≤n & x= (a);j) &
(Es)(Ek)(sêS & kêK & B(s,a,k)))

Dette viser at <G,S,K,B> også oppfyller kravet T8.

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Bevis for Teorem 2: Anta forutsetningene i Teorem 2 holder. Vi må da vise at ß;T har de egenskapene som er nevnt i definisjonen av en Tractatus-ramme.

(a) Vi har etter definisjonen av ß;T at ß;T(0) =ø. Anta for vilkårlige n og x at (1) 1≤nêNat & xêß;T(n). Vi må da vise at det finnes en a der a Inkl D^n og hvor man har Rest(x,a): a –(1-1)–> 2^I. Fra (1) og definisjonen av ß;T(n) følger det at det finnes k der vi har: (2) x= E;k & kê∂;n. Fra (2) og definisjonen av ∂;n følger (3) Dom(f(k)) Inkl D^n. Fra (2) og definisjonen av E;k følger:

(4) x = Mg(<a, c(Mg(w: wêI & f(k)‘aêƒ(w)),I)>: aêDom(f(k))) U
Mg(<a,c(ø,I)>: aê(D^n – Dom(f(k)))

Sett nå per definisjon (5) a0 = Dom(f(k)). Fra dette og (4) følger:

(6) Rest(x,a0) = Mg(<a, c(Mg(w: wêI & f(k)‘aêƒ(w)),I)>: aêDom(f(k)))

Det skulle være nokså åpenbart (leseren kan gi detaljene i beviset) at

(7) Func(Rest(x,a0)) & Dom(Rest(x,a0)) = a0 & Rgn(Rest(x,a0)) Inkl 2^I.

Vi må imidlertid vise at Rest(x,a0) er en-entydig. Anta derfor z1,z2êa0 &z1≠z2 for vilkårlige z1,z2. Vi ønsker å vise Rest(x,a0)(z1)≠Rest(x,a0)(z2). Siden z1,z2êa0 har vi z1,z2êDom(f(k)). I lys av klausul (f) i definisjonen av T-struktur følger da, siden z1≠z2, at
(8) f(k)(z1) ≠ f(k)(z2). Siden Rgn(f(k)) Inkl S har man
(9) f(k)(z1), f(k)(z2)êS. Fra (6) ovenfor følger:

(10) Rest(x,a0)‘z1 = c(Mg(w: wêI & f(k)‘z1êƒ(w)),I) og

(11) Rest(x,a0)‘z2 = c(Mg(w: wêI & f(k)‘z2êƒ(w)),I)

Anta nå for reduktio ad absurdum at Rest(x,a0)‘z1 = Rest(x,a0)‘z2. Ved hjelp av (10) og (11) følger da:

Mg(w: wêI & f(k)‘z1êƒ(w)) = Mg(w: wêI & f(k)‘z2êƒ(w))

Fra dette følger i sin tur:

(12) (Aw)(wêI –>(f(k)‘z1êƒ(w) <–> f(k)‘z2êƒ(w)))

Fra (8) og (9) følger at {f(k)(z1)}êPt(S). Fra dette og den andre forutsetningen i teoremet følger eksistensen av w0êI slik at

(13) ƒ(w0) = {f(k)(z1)} Fra dette og (8) følger:

(14) f(k)(z1)êƒ(w0) & ¬(f(k)(z2)êƒ(w0))

Siden w0êI strider dette mot (12). Det følger at Rest(x,a0)‘z1 ≠ Rest(x,a0)‘z2. I lys av (7) har vi derfor vist:

(15) a0 Inkl D^n & Rest(x,a0) : a0–(1-1)–> 2^I.

Anta nå for vilkårlig z at zêa0. Da har man i lys av (5) at zêDom(f(k)). Det følger i så fall at

(16) f(k)(z)êRgn(f(k)) Inkl S.

(Jmf. klausul (b) i definisjonen av T-struktur) I lys av (6) har man

Rest(x,a0)(z) = c(Mg(w: wêI & f(k)‘zêƒ(w)),I) og derfor

(17) c;-1(Rest(x,a0)I) = Mg(w: wêI & f(k)‘zêƒ(w)).

siden f(k)(z)êS følger det at {f(k)(z)} Inkl S og derfor at {f(k)(z)}êPt(S). Ved hjelp av den andre forutsetningen i teoremet finnes det derfor en w0êI slik at

ƒ(w0) = {f(k)(z)}. I så fall har man f(k)(z)êƒ(w0) &w0êI.

I lys av (17) har man derfor w0êc;-1(Rest(x,a0),I). Herav følger

True(w0, µ;-1(c;-1(Rest(x,a0),I))). Dette innebærer Cons(µ;-1(c;-1(Rest(x,a0),I))). Vi har nå vist:

(18) (Az)(zêa0 –> Cons(µ;-1(c;-1(Rest(x,a0),I)))) Anta for vilkårlig z at zêD^n–a0. Ved hjelp av (4) og (5) følger da x(z) = c(ø,I). Fra dette, (15) og (18) følger det ß;T oppfyller det første kravet i definisjonen av Tractatus-ramme.

(b) Anta m,nêNat og m,n≥1 og dessuten xêß;T(n) & yêß;T(m) &x≠y for vilkårlige m,n og x,y. Vi har da i lys av definisjonene av ∂;n og E;k som er gitt i satsen at det må finnes k1 og k2 der vi har:

(1) x = Mg(<a, c(Mg(w: wêI & f(k1)‘aêƒ(w)),I)>: aêDom(f(k1))) U
Mg(<a,c(ø,I)>: aê(D^n – Dom(f(k1)))

og (2) y = Mg(<a, c(Mg(w: wêI & f(k2)‘aêƒ(w)),I)>: aêDom(f(k2))) U
Mg(<a,c(ø,I)>: aê(D^m – Dom(f(k2)))

og der vi dessuten har

(3) Dom(f(k1)) Inkl D^n og Dom(f(k2)) Inkl D^m

Dessuten må man ha (4) k1,k2êK. Det vi ønsker å vise er:

(+) Rgn(x)ΩRgn(y) = {c(ø,I)}.

Fra (1) og (2) kan man slutte (5) {c(ø,I)} Inkl Rgn(x)ΩRgn(y) fordi

Rgn(Rest(x, D^n– Dom(f(k1)))) = {c(ø,I)} og

Rgn(Rest(x, D^m– Dom(f(k2)))) = {c(ø,I)}

og disse to verdiområdene er inkludert i henholdsvis Rgn(x) og Rgn(y).[8] Anta nå for reduktio ad absurdum at (6) rêRgn(x)ΩRgn(y) og dessuten (7) r≠ c(ø,I). Kan vi vise at dette leder til en motsigelse har vi vist

(Ar)(rêRgn(x)ΩRgn(y) –> rê{c(ø,I)})

Med andre ord vil vi da ha bevist inklusjonen den andre veien i (5) og kan i så fall konkludere med at (+) holder.

Fra (6) og (7) følger eksistensen av a1,a2 der man har

r=x(a1) & a1êDom(f(k1)) & r= y(a2) & a2êDom(f(k2)). Fra dette, (1) og (2) følger så:

---

[8] Allment har man Func(f) –> Rgn(Rest(f,x)) Inkl Rgn(f).

c(Mg(w: wêI & f(k1)‘a1êƒ(w)),I) = c(Mg(w: wêI & f(k2)‘a2êƒ(w)),I). Herav:
(8) (Aw)(wêI –> (f(k1)‘a1êƒ(w) <–> f(k2)‘a2êƒ(w)))
Er nå f(k1) = f(k2) har man umiddelbart i lys av (1) og (2) at x=y som strider mot forutsetningen om at x≠y. Derfor f(k1)≠f(k2). Fra dette følger åpenbart at k1≠k2 i lys av det forhold at <G,S,K,f> er en T-struktur. Men fra k1≠k2 & k1,k2êK følger fra den tredje klausulen i Definisjon 3 at (9) Rgn(f(k1)) Ω Rgn(f(k2)) =ø. Nå har man f(k1)(a1)êS og derfor at {f(k1)(a1)}êPt(S). Siden ƒ: I –(1-1,på)–> Pt(S) må det derfor finnes w0êI slik at ƒ(w0)= {f(k1)(a1)}. Men fra dette og (8) følger
f(k2)(a2) = f(k1)(a1) som strider mot (9). Dette viser at en motsigelse kan utledes fra (6) og (7). Det følger at (+) holder. Dette viser at ß;T oppfyller det andre kravet som er nevnt i Definisjon (4).

(c) Under forutsetningene som er nevnt i satsen må vi også vise at SInd(In(ß;T)–{µ;-1(ø)}). Dette er en litt mindre triviell sak. Anta
(1) Δ Inkl (In(ß;T) – {µ;-1(ø)}) for vilkårlig Δ. Vi ønsker da å vise at det finnes en w0êI som er slik at
w0 := Δ & w0:= Mg(Neg(y): yê((In(ß;T) – {µ;-1(ø)}) –Δ))
Vi skal definere en avbildning H, hvor domenet til H er S. Først definerer vi en funksjon q1 ved å sette:
(2.1) q1(x) = (ik)(kêK & xêRgn(f(k)) om xêS
Denne funksjonen q avbilder som man ser ethvert element xêS på et element i K. Anta xêS. I lys av kravet (d) i Definisjon 3 har man da at det finnes en k der kêK & xêRgn(f(k)). Anta imidlertid at det fantes k;1,k;2êK slik at xêRgn(f(k;1)) & xêRgn(f(k;2)). Da følger ved hjelp av kravet (c) i Definisjon 3 at k;1=k;2. Er derfor xêS finnes det altså en og bare en k slik at kêK og xêRgn(f(k)). Dette viser at funksjonen q1 er veldefinert.

Dernest definerer vi en funksjon q2 ved:
(2.2) q2(x) = f(q1(x));-1(x) om xêS
Man ser at dersom xêS vil q2(x) være et entydig bestemt element i G^n for noe nêNat. Det bør bemerkes at dersom xêS er paret <q1(x),q2(x)> entydig bestemt.

Det kan også være gunstig på dette punkt å innføre ytterligere en funksjon q3. Vi definerer denne slik:
(2.3) q3(x) = (in)(nêNat & q2(x)êG^n)

Tilslutt definerer vi funksjonen H ved:
(2.3) H(x) = E;(q1(x))‘q2(x) om xêS.
Vi ønsker å vise at H har de følgende egenskaper:
(3) H : S–(1-1,på)–> In(ß;T) –{µ;-1(ø)}
(4) X Inkl S –> ƒ;-1(X) := H"X &
(Ay)(yê(Rgn(H)–H"X) –> ƒ;-1(X) := Neg(y))
Det skulle være opplagt ut fra definisjonen av H at H er en funksjon og at domenet til H er S. Det er derfor tilstrekkelig å vise at H er en-entydig og på In(ß;t)–{c(ø,I)}. For å vise at H er en-entydig viser vi først at følgende holder:
(5) xêS –> H(x) = c(Mg(w: wêI & xêƒ;w),I)
Anta derfor for vilkårlig x at xêS. Sett k= q1(x). Da har vi i lys av definisjonen av q1 at kêK. Videre følger ved hjelp av definisjonen av q1 at xêRgn(f(k)). Dette innebærer at det finnes z slik at <z,x>êf(k). Det følger at f(k)(z)=x siden f(k) er en funksjon. Sett nå videre per definisjon a = q2(x) og n= q3(x). Da har man at Dom(f(k)) Inkl G^n Inkl D^n. Det følger videre at zêDom(f(k)). Ved hjelp av definisjonen av H har man

H(x) = E;(q1(x))‘q2(x) = E;k(a)

Videre har man, siden zêDom(f(k)) og f(k) er en-entydig at

z= f(k);-1(x) = f(q1(x);-1(x) = q2(x) = a

Siden z=aêDom(f(k)) har man derfor ved hjelp av definisjonen av E at

E;k(a) = c(Mg(w: wêI & f(k)(a)êƒ(w)),I)

Men z= a og f(k)(z) = f(k)(a) = x. Det følger at

H(x) = E;k(a) = c(Mg(w: wêI & xêƒ(w)),I)

Dette viser at (5) holder.

Vi kan nå gå videre å vise at H er en-entydig. Anta x,yêS og at x≠y. Da har vi ved hjelp av (5) at :

H(x) = c(Mg(w: wêI & xêƒ(w)),I)
H(y) = c(Mg(w: wêI & yêƒ(w)),I)

Nå har man ƒ: I –(1-1,på)–> Pt(S) og derfor at det finnes w0êI der ƒ(w0) = {x}. Det følger da at (6) w0êc;-1(H(x),I) = Mg(w: wêI & xêƒ(w)). Men siden x≠y har vi ¬(yê{x}) og derfor siden ƒ(w0) = {x} at ¬(yêƒ(w0)). Det følger at ¬(w0êc;-1(H(y),I)). Fra dette og (6) følger at H(x)≠H(y). Dette viser at H er en-entydig.

La oss så vise at H er på In(ß;T)–{c(ø,I)}. Anta for vilkårlig x at (7) xê(In(ß;T)–{c(ø,I)}). Da følger det at (8) xêIn(ß;T) og x≠c(ø,I). Fra den første konjunkten her følger det i lys av definisjonen av In at det finnes a,y og n slik at

(9) x= y(a) & nêNat & n≥1 & aêD^n & yêß;T(n).

Fra den siste konjunkten i (3) følger det ved hjelp av definisjonen av ß;T at det finnes k slik at (10) y= E;k & kê∂;n & kêK. Fra dette følger så i lys av definisjonen av ∂;n at Dom(f(k)) Inkl D^n. Vi må ha at n=g(k). Er
aê(D^g(k) – Dom(f(k)) har man etter definisjonen av E;k, (9) og (10) at

y(a) = E;k(a) = c(ø,I). Da har man ved hjelp av (9) at x=c(ø,I). Dette strider imidlertid mot (8). Det følger derfor at (11) aêDom(f(k)). Vi setter nå per definisjon at s0 = f(k)(a) og ønsker å vise (+) H(s0) = x. Dette innebærer at vi må bevise x = E;(q1(s0))(q2(s0)). Nå har man at x= y(a) = E;k(a). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise q1(s0)=k og q2(s0)=a. Nå har man

q1(s0) = (ik')(k'êK & s0êRgn(f(k')). Dette innebærer siden s0= f(k)(a) at f(k)(a)êRgn(f(q1(s0))). Vi har at f(k)(a)êRgn(f(k)). Det følger derfor at Rgn(f(q1(s0)))ΩRgn(f(k)) ≠ø. Fra dette og definisjonen av T-struktur følger q1(s0)=k. Videre har man:

q2(s0) = f(q1(s0));-1(s0) = f(q1(s0));-1(f(k)(a)) = f(k);-1(f(k)(a)) = a

siden f(k) er en-entydig og a er med i domenet til f(k). Dette viser at H er på.

Vi har nå bevist (3). La oss gå videre å gi bevis for (4): Anta for vilkårlig X at X Inkl S. Sett w0 = ƒ;-1(X). Man har at H"X = Mg(H(z): zêX). Det er først nødvendig å bevise:

(+) (Az)(zêX –> w0:= H(z)).

Anta derfor for vilkårlig z at zêX. Vi har ved hjelp av (5):

H(z) = c(Mg(w: wêI & zêƒ;w),I).

Nå følger det siden zêX at zêƒ(ƒ;-1(X))= ƒ(w0). Vi har derfor at w0êc;-1(H(x),I) og derfor w0:= H(x). Dette viser at (+) holder.

Det er også nødvendig å bevise:

(++) (Ay)(yê(Rgn(H)–X) –> ƒ;-1(X) := Neg(y))

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes y0 slik at

(12) y0ê(Rgn(H)–H"X) & ƒ;-1(X) := y0.

Nå har man Rgn(H) = Mg(H(z): zêS). Fra dette og den første konjunkten i (12) følger at (13) y0êMg(H(z): zêS) & ¬(y0êMg(H(z): zêX)). Fra dette følger det at det finnes z slik at:

(14) y0=H(z) & zêS & (Az)(zêX –> y0≠H(z)). Nå har man at w0=ƒ;-1(X) og derfor at ƒ(w0) =X. Siden w0 := y0 ifølge (12) har man
w0êc(H(z),I) =Mg(w: wêI & zêƒ(w)). Herav zêƒ(w0) = ƒ(ƒ;-1(X)) = X. Fra dette og den andre konjunkten i (14) følger y0≠H(z). Men dette strider åpenbart mot den første konjunkten i (14). Dette viser at (4) holder.

Vi kan nå fullføre beviset for SInd(In(ß;T) –{c(ø,I)}). Anta for vilkårlig Δ at Δ Inkl (In(ß;T) –{c(ø,I)}). Da har vi i lys av (3) at Δ Inkl Rgn(H).
Sett S0= H;-1"Δ. Ved hjelp av (3) følger da S0 Inkl S. Sett videre w0= ƒ;-1(S0). Ved hjelp av (4) har man da w0:= H"(H;-1"(Δ)) = Δ. Anta for vilkårlig q at
qêMg(Neg(y): yê((In(ß;T)–{c(ø,I))–Δ). Da finnes y slik at
q= Neg(y) & yê(Rgn(H) –Δ). Men Δ = H"(H;-1"(Δ)) = H"S0. Derfor:
q= Neg(y) & yê(Rgn(H)–H"S0). Nå er S0 Inkl S & w0 = ƒ;-1(S0). Fra dette og (4) følger w0 := q. Dette viser at In(ß;T) –Δ er en strengt uavhengig utsagnsmengde.

(d) For å fullføre beviset for satsen må man vise at U = C(In(ß;T)–{c(ø,I)}). Siden det er åpenbart at (In(ß;T)–{c(ø,I)}) Inkl U følger det at
C(In(ß;T)–{c(ø,I)}) Inkl U siden mengden av utsagn er lukket under negasjon og uendelig konjunksjon. Det er imidlertid også nødvendig å bevise inklusjonen den andre veien. Anta derfor for vilkårlig x at xêU. Da har man µ(x) Inkl I. For hvert element wêI definerer vi:
q(w) = SNu(H"ƒ(w)) Ω SNu(Mg(Neg(y): yê(Rgn(H) – H"ƒ(w))))
Vi ønsker å vise at µ(q(w)) = {w}. Dette viser vi ved hjelp (4) som vi beviste under punkt (c). Vi har ƒ(w)êPt(S) og derfor ƒ;-1(ƒ(w)) = w. Fra (4) følger da:
w:= SNu(H"ƒ(w)) & w:= SNu(Mg(Neg(y): yê(Rgn(H) – H"ƒ(w))))
Det følger at wêµ(q(w)). Anta w'êI & w' ≠w. Da har man siden ƒ er en-entydig at ƒ(w') ≠ ƒ(w). Videre har man ƒ;-1(ƒ(w')) = w' & ƒ(w')êPt(S). Ved hjelp av (4) følger:
(1) w':= SNu(H"ƒ(w')) & w':= SNu(Mg(Neg(y): yê(Rgn(H) – H"ƒ(w'))))
Anta w' := q(w), mao. at w'êµ(q(w)). Da har man:
(2) w':= SNu(H"ƒ(w)) & w':= SNu(Mg(Neg(y): yê(Rgn(H) – H"ƒ(w))))
Men ƒ(w') ≠ ƒ(w). Dette innebærer at det finnes x0êS slik at man enten har
(i) x0êƒ(w') & ¬(x0êƒ(w)) eller (ii) ¬(x0êƒ(w')) & x0êƒ(w). I det første tilfellet har man H(x0)êH"ƒ(w') & H(x0)ê(Rgn(H)–H"ƒ(w)). Fra dette, (1) og (2) følger en motsigelse. Man resonnerer på tilsvarende måte i det andre tilfellet. Vi har nå vist at det er umulig at det kan finnes noe w' der w'êI &w'≠w & w'êµ(q(w)). Siden wêµ(q(w)) følger µ(q(w)) = {w}. Det følger at x = UNu/wêµ(x)/(q(w)).

Fordi C(In(ß;T)– {c(ø,I)}) er lukket under uendelig konjunksjon og negasjon, og derfor under uendelig union, er det klart at
q(w)êC(In(ß;T)– {c(ø,I)}) for alle wêI. Det følger at:
Mg(q(w): wêµ(x)) ê C(In(ß;T)– {c(ø,I)}). Men da må man også ha:
UNu/wêµ(x)/(q(w))êUNu/wêµ(x)/(q(w)). Dette viser at U = C(In(ß;T)–{c(ø,I)}).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 2. **Q.E.D.**

Bevis for Teorem 3: Anta forutsetningene i teoremet holder og at G,K,S og f er definert som angitt. Vi skal da vise at <G,S,K,f> oppfyller kravene til en T-struktur, dvs. kravene (a) – (f) i Definisjon 3.

(a) Vi må først vise at G≠ø & K≠ø & S≠ø. Siden vi arbeider innenfor rammen av teorien E;3 har vi at Cd(I) ≥ Aleph;0. Dette vil si at mengden av mulige verdener er minst tellbart uendelig. Fra dette aksiomet følger umiddelbart at Cd(U) ≥Aleph;0, mao. at kardinaltallet til mengden av alle utsagn er minst tellbart uendelig. Siden ß forutsettes å være en Tractatus-ramme over domenet D følger at U = C(In(ß)–{c(ø,I)}). Siden vi dessuten har

at
SInd(In(ß)–{c(ø,I)}) følger det at Cd(In(ß)–{c(,I)}) ≥ Aleph;0. Fra dette kan man så slutte at In(ß)–{c(ø,I)} ≠ø. Herav følger så at det må finnes nê(Nat–{ø}), zêD^n og xêß(n) slik at x(z)ê(In(ß)–{c(ø,I)}). Men siden n≥1 må det finnes y slik at yêD og der man har y = (z);j for noe j der 1≤j≤nêNat. Fra alt dette og definisjonen av G som er gitt i teoremet følger G≠ø. Siden xêß(n) Inkl UN/nêNat/(ß(n)) = K følger det at K≠ø. Siden x(z)≠c(ø,I) og siden zêD^n= Dom(x) har vi åpenbart at x(z)êRgn(f(x)) slik f er definert. Dette innebærer at x(z)êUN/yêK/(Rgn(f(y))). Man har derfor i lys av definisjonen av S at S≠ø.

(b) Det neste vi må vise for å godtgjøre at <G,S,K,f> er T-struktur er at:

(1) Func(f) & Dom(f) = K & (Ak)(kêK –> Func(f(k)) &
(Ak)(kêK –> (En)(n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n &
Rgn(f(k)) Inkl S))

Det følger at vi må gi bevis for de fire konjunktene i (1).

(i) Det skulle være klart fra definisjonen av f at Func(f) & Dom(f) = K.

(ii) Anta xêK. Det er da nødvendig å bevise:

(+) Func(Rest(x, Mg(y: yêDom(x) & x(y)≠c(ø,I))))

Siden xêK = UN/nêNat/(ß(n)) har man xêß(n) for noe n der nêNat & n≥1. Nå har man per definisjon av "begrepsramme" at ß(n) Inkl (2^I)^(D^n). Man kan derfor slutte at xê(2^I)^(D^n). Fra dette følger i lys av definisjonen av "A^B" at Func(x). Men man har allment at Rest(x,A), der A er en mengde, er en funksjon om x er det. Det følger at (+) holder.

Det neste vi må vise at at Dom(f(x)) Inkl G^n for noe nêNat der n≥1. Anta for vilkårlig y at yêDom(f(x)). Da har vi i lys av definisjonen av "f(x)" at yêDom(x) & x(y)≠c(ø,I) der xêß(n) & 1≤nêNat. Det følger at xê(2^I)^(D^n) og derfor at yêD^n. Anta 1≤j≤n for vilkårlig naturlig tall j. Da har man (y);jêD. I lys av det øvrige som vi så langt har utledet, og definisjonen av G, følger det at (y);jêG. Vi har derfor (Aj)(1≤j≤n &jêNat –> (y);jêG). Men dette impliserer at yêG^n. Vi har nå vist at Dom(f(x)) Inkl G ^n. Anta nå for vilkårlig y at yêRgn(f(x)). Siden xêK følger yêUN/xêK/(Rgn(f(x))) = S. Siden y var vilkårlig har vi vist Rgn(f(x)) Inkl S. Dermed er det godtgjort at (1) holder.

(c) Anta k1,k2êK & k1≠k2 for vilkårlige k1,k2. Vi ønsker å vise at Rgn(f(k1))Ω Rgn(f(k2)) =ø. I lys av definisjonene av K og f følger:

(1) f(k1) = Rest(k1, Mg(y: yêDom(k1) & k1(y)≠c(ø,I)))
(2) f(k2) = Rest(k2, Mg(y: yêDom(k2) & k2(y)≠c(ø,I)))

Videre følger det at det finnes n1,n2, der 1≤n1,n2êNat, slik at
k1êß(n1) & k2êß(n2).

Siden k1≠k2, følger fra dette, og forutsetningen om at ß er en Tractatus-ramme, (Jmf. Definisjon 4, klausul (2)) at Rgn(k1)ΩRgn(k2) = {c(ø,I)}. Men fra dette, (1) og (2) følger Rgn(f(k1))ΩRgn(f(k2)) = ø.

(d) Anta xêS. Ved hjelp av definisjonen av S som er gitt i satsen har man da xêUN/zêK/(Rgn(f(z))). Dette innebærer at (Ek)(kêK & xêRgn(f(k))) som er det vi ønsker.

(e) Anta xêG. I lys av definisjonen av G har man da at (1) xêD og at det finnes n,j,y og a slik at

(2) n,jêNat & 1≤j≤n & yêD^n & aêß(n) & z = (y);j & a(y)≠c(ø,I))

Herav følger for alle r der 1≤r≤n at (y);rêD. Men dette, (2) og definisjonen av G impliserer (3) yêG^n. Siden aêß(n) & a(y)≠c(ø,I) har man åpenbart at yêDom(a). I lys av definisjonen av f har man da yêDom(f(a)) & aêK. Det følger at

(4) yêUN/kêK/(Dom(f(k)))

Fra (2),(3) og (4) følger så:

(En)(Ej)(Ez)(nêN & 1≤j≤n & zêG^n & x= (z);j & zêUN/kêK/(Dom(f(k)))).

Dette viser at <G,S,K,f> også oppfyller kravet (e) i definisjonen av T-struktur.
(f) Det gjenstår nå bare å vise:
(0) (Ak)(kêK –> f;k: Dom(f;k) –(1-1)–> Rgn(f;k))
Anta derfor kêK. Da har man i lys av definisjonen av K at kêß(n) for noe nêNat der n≥1. Dessuten har man:
(1) f(k) = Rest(k, Mg(y: yêDom(k) & k(y)≠c(ø,I)))
Det er klart at f(k) er en funksjon ie. at vi har f;k: Dom(f;k) –> Rgn(f;k). Dette ble bevist ovenfor under punkt (b). Det eneste man behøver å vise er derfor at f(k) er en-entydig. Anta følgelig at y1,y2êDom(f(k)) og at y1≠y2. Da har man ved hjelp av (1) at k(y1)≠c(ø,I) ≠ k(y2). Det følger videre ved hjelp av (1) at y1,y2êDom(k). Videre har vi kêß(n) = (2^I)^(D^n) og derfor at y1,y2êD^n. Siden ß ifølge forutsetningene er en Tractatus-ramme følger det at det finnes a slik at
a Inkl D^n & Rest(k,a): a –(1-1)–> (2^I) &
(Az)(zê(D^n – a) –> k(z) = c(ø,I)))
Siden y1,y2êD^n & k(y1)≠c(ø,I) ≠ k(y2) følger det at y1,y2êa. Men da har vi k(y1)≠k(y2). Men da følger det ved hjelp av (1) at f(k)(y1) ≠ f(k)(y2). Dette viser at (0) holder. Dermed er det gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

Bevis for Teorem 4:

(a) (i) Anta ß er en Tractatus-ramme over D. La ∂;1 – ∂;3 være henholdsvis identitetsavbildningen I begrenset til D, UN/nêN/(ß(n)) og In(ß). Man ser da lett at ∂;1 – ∂;3 oppfyller de kravene som skal til ifølge Definisjon 7 for at ß er isomorf med ß.

(ii) Anta ß;1 og ß;2 er to Tractatus-rammer over henholdsvis D og D'. Vi skal vise at isomorfi-relasjonen mellom Tractatus-rammer er symmetrisk. Anta ß;1 er isomorf med ß;2. Ved hjelp av Definisjon 7 impliserer dette at det finnes funksjoner ∂;1,∂;2 og ∂;3 som oppfyller de følgende krav:
(1) ∂;1: D –(1-1,på) –>D'
∂;2: UN/nêNat/(ß;1(n)) –(1-1,på) –>UN/nêNat/(ß;2(n))
∂;3: In(ß;1)U{c(ø,I)} –(1-1,på) –> In(ß;2)U{c(ø,I)}
(2) (An)(nêNat –> (Ax)(xêß;1(n) –> ∂;2(x)êß;2(n))) & ∂;3(c(ø,I))=c(ø,I)
(3) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man
<x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;2(x))
for alle x;1,....,x;nêD
(4) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man ∂;3"Rgn(x) = Rgn(∂;2(x))
(5) Er aêß;1(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD, så gjelder:
∂;3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) = µ;-1(c;-1(∂;2(a)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n)),I))
Vi må vise at ß;2 er isomorf med ß;1. For dette formål er det i lys av Definisjon 7 tilstrekkelig å bevise:
(6) (∂;1);-1: D' –(1-1,på) –>D
(∂;2);-1: UN/nêNat/(ß;2(n)) –(1-1,på) –>UN/nêNat/(ß;1(n))
(∂;3);-1: In(ß;2)U{c(ø,I)} –(1-1,på) –> In(ß;1)U{c(ø,I)}
(7) (An)(nêNat –> (Ax)(xêß;2(n) –> (∂;2);-1(x)êß;1(n))) &
(∂;3);-1(c(ø,I)) = c(ø,I)
(8) Er xêß;2(n) & nêNat & n≥1 har man
<x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <(∂;1);-1(x;1),...,(∂;1);-1(x;n)>êDom((∂;2);-1(x))
for alle x;1,....,x;nêD'
(9) Er xêß;2(n) & nêNat & n≥1 har man (∂;3);-1"Rgn(x) = Rgn((∂;2);-1(x))

(10) Er aêß;2(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD', så gjelder:
(∂;3);-1(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) =
µ;-1(c;-1((∂;2);-1(a)((∂;1);-1(x;1),.....,(∂;1);-1(x;n)),I))

Når det gjelder (6) følger denne påstanden fra (1). Det skulle være unødvendig å gi noe detaljert bevis for dette. Når det gjelder (7) bemerker vi at det følger fra (1) og (2) at ∂;2 avbilder ß;1(n) en-entydig og på ß;2(n) for alle nêNat. Tar man dette i betraktning skulle det være klart at (7) holder.

Anta xêß;2(n) & nêNat & n≥1 og at x;1,....,x;nêD'. Da finnes det y;1,...,y;nêD slik at ∂;1(y;i) = x;i (i=1,..,n). Videre følger det at det finnes x'êß;1(n) slik at ∂;2(x')=x. Man har da i lys av (3):
<x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <∂;1(y;1),...,∂;1(y;n)>êDom(∂;2(x'))
<–> <y;1,...,y;n>êDom(x')
<–> <(∂;1);-1(x;1),...,(∂;1);-1(x;n)>êDom((∂;2);-1(x))

Dette viser at (8) holder.

Anta xêß;2(n) & nêNat & n≥1. Da har man ∂;2(x')=x for noe xêß;1(n) ved hjelp av (1). Det følger da ved hjelp av (4) at ∂;3"Rgn(x') = Rgn(∂;2(x')). Men siden siden ∂;3 og ∂;2 er en-entydige kan man herav slutte:
(∂;3);-1"Rgn(x) = (∂;3);-1"Rgn(∂;2(x')) = (∂;3);-1"∂;3"Rgn(x')
= Rgn((∂;2);-1(x))

Dette er hva vi ønsker og viser at (9) holder.

Anta aêß;2(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD'. Da har man at det finnes bêß;1(n) slik at ∂;2(b) =a og at det finnes y;1,...,y;nêD slik at ∂;1(y;i) = x;i (i=1,...,n). Man har da ved hjelp av (5):
∂;3(µ;-1(c;-1(b(<y;1,....,y;n>),I))) = µ;-1(c;-1(∂;2(b)(∂;1(y;1),.....,∂;1(y;n)),I))

og derfor:
(∂;3);-1(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) = (∂;3);-1(µ;-1(c;-1(∂;2(b)(<x;1,....,x;n>),I)))
= (∂;3);-1(∂;3(µ;-1(c;-1(b(<y;1,....,y;n>),I))))
= µ;-1(c;-1((∂;2);-1(a)(<y;1,....,y;n>),I))
= µ;-1(c;-1((∂;2);-1(a)(<(∂;1);-1(x;1),....,(∂;1);-1(x;n)>),I))

som er det vi ønsker. Dette viser at isomorfi-relasjonen er symmetrisk.

(iii) Anta ß;1, ß;2 og ß;3 er Tractatus-rammer over henholdsvis D, D' og D" og at ß;1 er isomorf med ß;2 og ß;2 er isomorf med ß;3. Fra det første følger at det finnes funksjoner ∂;1,∂;2 og ∂;3 som oppfyller de følgende krav:

(1) ∂;1: D –(1-1,på) –>D'
∂;2: UN/nêNat/(ß;1(n)) –(1-1,på) –>UN/nêNat/(ß;2(n))
∂;3: In(ß;1)U{c(ø,I)} –(1-1,på) –> In(ß;2)U{c(ø,I)}

(2) (An)(nêNat –> (Ax)(xêß;1(n) –> ∂;2(x)êß;2(n))) & ∂;3(c(ø,I)) = c(ø,I)

(3) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man
<x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;2(x))
for alle x;1,....,x;nêD

(4) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man ∂;3"Rgn(x) = Rgn(∂;2(x))

(5) Er aêß;1(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD, så gjelder:
∂;3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) = µ;-1(c;-1(∂;2(a)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n)),I))

Fra det at ß;2 er isomorf med ß;3 følger videre at det finnes funksjoner ∂';1,∂';2 og ∂';3 som oppfyller de følgende krav:

(6) ∂';1: D' –(1-1,på) –>D"
∂';2: UN/nêNat/(ß;2(n)) –(1-1,på) –>UN/nêNat/(ß;3(n))
∂';3: In(ß;2)U{c(ø,I)} –(1-1,på) –> In(ß;3)U{c(ø,I)}

(7) (An)(nêNat –> (Ax)(xêß;2(n) –> ∂';2(x)êß;3(n))) & ∂';3(c(ø,I)) = c(ø,I).

(8) Er xêß;2(n) & nêNat & n≥1 har man

<x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <∂';1(x;1),...,∂';1(x;n)>êDom(∂';2(x))

for alle x;1,....,x;nêD'

(9) Er xêß;2(n) & nêNat & n≥1 har man ∂';3"Rgn(x) = Rgn(∂';2(x))

(10) Er aêß;2(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD', så gjelder:

∂';3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) = µ;-1(c;-1(∂';2(a)(∂';1(x;1),.....,∂';1(x;n)),I))

Vi ønsker å vise at ß;1 er isomorf med ß;3. I lys av definisjonen er det da tilstrekkelig å bevise:

(11) ∂';1°∂;1: D –(1-1,på) –>D"

∂';2°∂;2: UN/nêNat/(ß;1(n)) –(1-1,på) –>UN/nêNat/(ß;3(n))

∂';3°∂;3: In(ß;1)U{c(ø,I)} –(1-1,på) –> In(ß;3)U{c(ø,I)}

(12) (An)(nêNat –> (Ax)(xêß;1(n) –> ∂';2(∂;2(x))êß;3(n))) &

∂';3°∂;3(c(ø,I)) = c(ø,I).

(13) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man

<x;1,...,x;n>êDom(x) <–>

<∂';1(∂;1(x;1)),...,∂';1(∂;1(x;n))>êDom(∂';2(∂;2(x)))

for alle x;1,....,x;nêD

(14) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man

∂';3"(∂;3"Rgn(x)) = Rgn(∂';2(∂;2(x)))

(15) Er aêß;1(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD, så gjelder:

∂';3(∂;3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I)))) =

µ;-1(c;-1(∂';2(∂;2(a))(∂';1(∂;1(x;1)),.....,∂';1(∂;1(x;n))),I))

I lys av (1) og (6) skulle det være temmelig opplagt at (11) holder. Videre skulle det være lett å se at (12) holder ved hjelp av (2) og (7).

Anta xêß;1(n) & nêNat & n≥1 og at x;1,....,x;nêD. Da følger ved hjelp av (3):

(16) <x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;2(x))

Vi må ha ∂;1(x;1),....,∂;1(x;n)êD' og ∂;2(x)êß;2(n). Ved hjelp av (8) har man da:

<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;2(x)) <–>

<∂';1(∂;1(x;1)),...,∂';1(∂;1(x;n))>êDom(∂';2(∂;2(x)))

Fra dette og (16) følger så det vi ønsker, nemlig (13).

Anta xêß;1(n) & nêNat & n≥1. I lys av (4) har man da

(17) ∂;3"Rgn(x) = Rgn(∂;2(x))

Siden xêß;1(n) følger det at ∂;2(x)êß;2(n). Man har da ved hjelp av (9):

∂';3"Rgn(∂;2(x)) = Rgn(∂';2(∂;2(x)))

Fra dette og (17) kan man slutte: ∂';3"(∂;3"Rgn(x)) = Rgn(∂';2(∂;2(x))).

Anta aêß;1(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD. Da har man ∂;1(x;i)êD' for i=1,..,n. Videre at ∂;2(a)êß;2(n). Det følger ved hjelp av (5) at

(18) ∂;3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) = µ;-1(c;-1(∂;2(a)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n)),I))

Videre følger ved hjelp av (10) at

(19) ∂';3(µ;-1(c;-1(∂;2(a)(<∂;1(x;1),....,∂;1(x;n)>),I))) =

µ;-1(c;-1(∂';2(∂;2(a))(∂';1(∂;1(x;1)),.....,∂';1(∂;1(x;n))),I))

Fra (18) og (19) har man:

∂';3(∂;3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I)))) =

µ;-1(c;-1(∂';2(∂;2(a))(∂';1(∂;1(x;1)),.....,∂';1(∂;1(x;n))),I))

Dette viser at isomorfi-relasjonen mellom Tractatus-rammer også er transitiv.

(b) (i) Anta <G,S,K,f> er en T-struktur. Definer ∂;1 – ∂;3 ved:

(1) ∂;1 = Rest(I,G) & ∂;2 = Rest(I,S) & ∂;3= Rest(I,K)

der I er en identitetsrelasjonen. Da har man åpenbart i lys av definisjonen av isomorfi at <G,S,K,f> er isomorf med <G,S,K,f>

(ii) Anta <G,S,K,f> og <G',S',K',f'> er to T-strukturer og anta at <G,S,K,f> er isomorf med <G',S',K',f'>. Siden <G,S,K,f> er isomorf med <G',S',K',f'> følger fra Definisjon 5 at det finnes funksjoner ∂;1,∂;2 og ∂;3 som oppfyller følgende krav:

(1) ∂;1: G –(1-1,på) –>G'
∂;2: S –(1-1,på) –>S'
∂;3: K –(1-1,på) –>K'
(2) Er kêK & n≥1 & nêNat har man
(a) Dom(f(k)) Inkl G^n <–> Dom(f'(∂;3(k))) Inkl G^n og
(b) <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(f'(∂;3(k)))
for alle x;1,...,x;nêG
(3) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(f'(∂;3(k))
(4) Er kêK & n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = f'(∂;3(k))(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n)) for alle
x;1,...,x;nêG der <x;1,...,x;n>êDom(f(k))

Vi ønsker å vise at <G',S',K',f'> er isomorf med <G,S,K,f>. Det vil i såfall være tilstrekkelig å bevise:

(5) (∂;1);-1: G' –(1-1,på) –>G
(∂;2);-1: S' –(1-1,på) –>S
(∂;3);-1: K' –(1-1,på) –>K
(6) Er kêK' & n≥1 & nêNat har man
(a) Dom(f'(k)) Inkl G^n <–> Dom(f((∂;3);-1(k))) Inkl G^n og
(b) <x;1,...,x;n>êDom(f'(k)) <–>
<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(f((∂;3);-1(k)))
for alle x;1,...,x;nêG'
(7) Er kêK' har man (∂;2);-1"Rgn(f'(k)) = Rgn(f((∂;3);-1(k))
(8) Er kêK' & n≥1 & nêNat & Dom(f'(k)) Inkl G'^n har man
(∂;2);-1(f'(k)(<x;1,....,x;n>)) = f((∂;3);-1(k))((∂;1);-1(x;1),.....,(∂;1);-1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG' der <x;1,...,x;n>êDom(f'(k))

Merk at hvis f er en funksjon så er f;-1 den konverse funksjonen til f. Man ser da lett at (5) umiddelbart følger fra (1).

Anta kêK' & n≥1 & nêNat. Siden kêK' finnes det k'êK slik at ∂;3(k') = k. Da har vi k'=(∂;3);-1(k). Vi har da

Dom(f'(k)) Inkl G^n <–> Dom(f'(∂;3(k'))) Inkl G^n
<–> Dom(f(k')) Inkl G^n
<–> Dom(f'((∂;3);-1(k))) Inkl G^n

Dette viser at punkt (a) i (6) holder. Anta videre x;1,...,x;nêG'. Da har man igjen ved hjelp av (1) at det finnes y;1,...,y;nêG slik at ∂;1(y;i) = x;i (i=1,..,n). Vi har:

<x;1,...,x;n>êDom(f'(k)) <–> <∂;1(y;1),...,∂;1(y;n)>êDom(f'(∂;3(k'))
<–> <y;1,...,y;n>êDom(f(k'))
<–> <(∂;1);-1(x;1),....(∂;1);-1(x;n)>êDom(f((∂;3);-1(k)))

Dette viser at det andre punktet under (6) holder.

Vi må vise at (7) holder. Anta kêK'. Da finnes k'êK slik at ∂;3(k')=k. Man har i så fall ved hjelp av (3):

(∂;2);-1"Rgn(f'(k)) = (∂;2);-1"Rgn(f'(∂;3(k')))
= (∂;2);-1"∂;2"Rgn(f(k'))) = Rgn(f((∂;3);-1(k)))

Anta kêK' & n≥1 & nêNat & Dom(f'(k)) Inkl G'^n og dessuten at x;1,...,x;nêG' der

<x;1,...,x;n>êDom(f'(k)). Da finnes y;1,....,y;nêG slik at x;i=∂;1(y;i) for i= 1,...,n. Videre finnes k'êK slik at ∂;3(k')=k. Man har da ved hjelp av (2) og (4):
(∂;2);-1(f'(k)(<x;1,....,x;n>)) = (∂;2);-1(f'(∂;3(k'))(<∂1(y;1),....,∂1(y;n)>))
= (∂;2);-1(∂;2(f(k')(<y;1,....,y;n>)))
= f((∂;3);-1(k))((∂;1);-1(x;1),.....,(∂;1);-1(x;n))
Dette viser at (8) holder. Dermed har vi vist at isomorfi-relasjonen er symmetrisk.

(iii) Anta <G,S,K,f>, <G',S',K',f'>, <G",S",K",f"> er tre T-strukturer og anta at <G,S,K,f> er isomorf med <G',S',K',f'> og at <G',S',K',f'> er isomorf med <G",S",K",f">. Det første innebærer at det finnes funksjoner ∂;1,∂;2 og ∂;3 som oppfyller følgende krav:

(1) ∂;1: G –(1-1,på) –>G'
∂;2: S –(1-1,på) –>S'
∂;3: K –(1-1,på) –>K'
(2) Er kêK & n≥1 & nêNat har man
(a) Dom(f(k)) Inkl G^n <–> Dom(f'(∂;3(k))) Inkl G^n og
(b) <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(f'(∂;3(k)))
for alle x;1,...,x;nêG
(3) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(f'(∂;3(k))
(4) Er kêK & n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = f'(∂;3(k))(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n)) for alle
x;1,...,x;nêG der <x;1,...,x;n>êDom(f(k))

At <G',S',K',f'> og <G",S",K",f"> er isomorfe impliserer at det finnes funk-sjoner ∂';1,∂';2 og ∂';3 som oppfyller følgende krav:

(5) ∂';1: G' –(1-1,på) –>G"
∂';2: S' –(1-1,på) –>S"
∂';3: K' –(1-1,på) –>K"
(6) Er kêK' & n≥1 & nêNat har man
(a) Dom(f'(k)) Inkl G'^n <–> Dom(f"(∂';3(k))) Inkl G"^n og
(b) <x;1,...,x;n>êDom(f'(k)) <–>
<∂';1(x;1),...,∂';1(x;n)>êDom(f"(∂';3(k)))
for alle x;1,...,x;nêG'
(7) Er kêK' har man ∂';2"Rgn(f'(k)) = Rgn(f"(∂';3(k))
(8) Er kêK' & n≥1 & nêNat & Dom(f'(k)) Inkl G'^n har man
∂';2(f'(k)(<x;1,....,x;n>)) = f"(∂';3(k))(∂';1(x;1),.....,∂';1(x;n)) for alle
x;1,...,x;nêG' der <x;1,...,x;n>êDom(f'(k))

Det vil være tilstrekkelig å vise:

(9) ∂';1°∂;1: G –(1-1,på) –>G"
∂';2°∂;2: S –(1-1,på) –>S"
∂';3°∂;3: K –(1-1,på) –>K"
(10) Er kêK & n≥1 & nêNat har man
(a) Dom(f(k)) Inkl G^n <–> Dom(f"(∂';3(∂;3(k)))) Inkl G"^n og
(b) <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>
<∂';1(∂;1((x;1)),...,∂';1(∂;1((x;n))>êDom(f"(∂';3(∂;3(k))))
for alle x;1,...,x;nêG
(11) Er kêK har man ∂';2"(∂;2("Rgn(f(k))) = Rgn(f"(∂';3(∂;3(k)))
(12) Er kêK & n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂';2(∂;2(f'(k)(<x;1,....,x;n>)))
= f"(∂';3(∂;3(k)))(∂';1(∂;1(x;1)),.....,∂';1(∂;1(x;n))) for alle
x;1,...,x;nêG der <x;1,...,x;n>êDom(f(k))

Her er det klart at (9) følger fra (1) og (4). La oss gi bevis for (10). Anta for vilkårlig k at kêK & n≥1 & nêNat. Man har da ved hjelp av (2) at
(13) Dom(f(k)) Inkl G^n <–> Dom(f'(∂;3(k))) Inkl G^n
Men ∂;3(k)êK'. Det følger derfor ved hjelp av (6) at
Dom(f'(∂;3(k))) Inkl G'^n <–> Dom(f"(∂';3(∂;3(k)))) Inkl G"^n
som sammen med (13) gir det vi ønsker. Tilsvarende har man om x;1,...,x;nêG ved hjelp av (2), punkt (b), at:
(14) <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(f'(∂;3(k)))
Det er klart fra (1) at ∂;1(x;i)êG' for i=1,...,n. Siden ∂;3(k)êK' har man da ved hjelp av (6) at:
<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(f'(∂;3(k))) <–>
<∂';1(∂;1(x;1)),...,∂';1(∂;1(x;n))>êDom(f"(∂';3(∂;3(k))))
Dette og (14) impliserer (10).

Det er nødvendig å gi bevis for (11). Anta kêK. Da har man ∂;3(k)êK'. Fra (3) har man da (15) ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(f'(∂;3(k)). Videre har man ved hjelp av (7), siden ∂;3(k)êK', at ∂';2"Rgn(f'(∂;3(k))) = Rgn(f"(∂';3(∂;3(k))). Fra dette og (15) følger åpenbart: ∂';2"(∂;2("Rgn(f(k))) = Rgn(f"(∂';3(∂;3(k))).

Det gjenstår å gi bevis for (12). Anta x;1,...,x;nêG & <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) der kêK & n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n. Fra dette og (4) har man:
(16) ∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = f'(∂;3(k))(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))
Nå må man ha ∂;3(k)êK' og ∂;1(x;i)êG' for i=1,...,n. Man har derfor ved hjelp av (8):
∂';2(f'(∂;3(k))(<∂;1(x;1),....,∂;1(x;n)>)) =
f"(∂';3(∂;3(k)))(∂';1(∂;1(x;1)),.....,∂';1(∂;1(x;n)))
Sammen med (16) gir dette en det man ønsker, nemlig:
∂';2(∂;2(f'(k)(<x;1,....,x;n>)))
= f"(∂';3(∂;3(k)))(∂';1(∂;1(x;1)),.....,∂';1(∂;1(x;n)))
Dette avslutter beviset for punkt (b) i Teorem 4.

(c) Anta ß;1 og ß;2 er to Tractatus-rammer over henholdsvis D og D' og t en T-struktur. Anta ß;1 er isomorf med ß;2 og t er isomorf med ß;1.

Fra det at ß;1 er isomorf med ß;2 følger at det finnes funksjoner ∂;1,∂;2 og ∂;3 som oppfyller de følgende krav:
(1) ∂;1: D –(1-1,på) –>D'
∂;2: UN/nêNat/(ß;1(n)) –(1-1,på) –>UN/nêNat/(ß;2(n))
∂;3: In(ß;1)U{c(ø,I)} –(1-1,på) –> In(ß;2) U{c(ø,I)}
(2) (An)(nêNat –> (Ax)(xêß;1(n) –> ∂;2(x)êß;2(n))) & ∂;3(c(ø,I)) = c(ø,I)
(3) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man
<x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;2(x))
for alle x;1,....,x;nêD
(4) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man ∂;3"Rgn(x) = Rgn(∂;2(x))
(5) Er aêß;1(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD, så gjelder:
∂;3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) = µ;-1(c;-1(∂;2(a)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n)),I))

Fra den forutsetningen at t=<G,S,K,f> er isomorf med ß;1 følger at det finnes avbildninger π;1, π;2 og π;3 som oppfyller følgende krav:
(6) π;1: G –(1-1,på) –>D
π;2: S –(1-1,på) –>In(ß;1) – {c(ø,I)}
π;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß;1(n))
(7) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
π;3(k)êß;1(n)

(8) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:
π;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = π;3(k)(π;1(x;1),.....,π;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(9) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <π;1(x;1),...,π;1(x;n)>êDom(π;3(k)) &
π;3(k)(<π;1(x;1),...,π;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(10) Er kêK har man π;2"Rgn(f(k)) = Rgn(π;3(k)) –{c(ø,I)}

Vi ønsker å vise at t er isomorf med ß;2. I lys av definisjonene som har blitt gitt er det da tilstrekkelig å bevise følgende:

(11) ∂;1°π;1: G –(1-1,på) –>D'
∂;3°π;2: S –(1-1,på) –>In(ß;2) – {c(ø,I)}
∂;2°π;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß;2(n))
(12) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;2(π;3(k))êß;2(n)
(13) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:
∂;3(π;2(f(k)(<x;1,....,x;n>))) = ∂;2(π;3(k))(π;1(x;1),.....,π;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(14) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>.
<∂;1(π;1(x;1)),...,∂;1(π;1(x;n))>êDom(∂;2(π;3(k))) &
∂;2(π;3(k))(<∂;1(π;1(x;1)),...,∂;1(π;1(x;n))>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(15) Er kêK har man (∂;3°π;2)"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;2(π;3(k))) –{c(ø,I)}

Det er nokså åpenbart at (11) følger fra (1) og (6).

Anta kêK & nêNat & n≥1 og Dom(f(k)) Inkl G^n. Da har vi ved hjelp av (7) at π;3(k)êß;1(n). Ved hjelp av (2) følger så ∂;2(π;3(k))êß;2(n). Dette viser at (12) holder.

Anta kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n. Da har man ved hjelp av (8):
π;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = π;3(k)(π;1(x;1),.....,π;1(x;n)).
Vi har da ved hjelp av (5):
∂;3(π;2(f(k)(<x;1,....,x;n>))) = ∂;3(π;3(k)(π;1(x;1),.....,π;1(x;n)))
= ∂;2(π;3(k))(π;1(x;1),.....,π;1(x;n)).
Dette viser at (13) holder.

Anta kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n og x;1,...,x;nêG. Ved hjelp av (9) har man da:
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <π;1(x;1),...,π;1(x;n)>êDom(π;3(k)) &
π;3(k)(<π;1(x;1),...,π;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
Men π;1(x;1),...,π;1(x;n)êD og vi har da i lys av (3)
<π;1(x;1),...,π;1(x;n)>êDom(π;3(k)) <–>
<∂;1(π;1(x;1)),...,∂;1(π;1(x;n))>êDom(∂;2(π;3(k)))
I lys av (1) og (5) innebærer det vi nå har vist:
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>.
<∂;1(π;1(x;1)),...,∂;1(π;1(x;n))>êDom(∂;2(π;3(k))) &
∂;2(π;3(k))(<∂;1(π;1(x;1)),...,∂;1(π;1(x;n))>)≠ c(ø,I)
Dette viser at (14) holder. Anta kêK da har vi ved hjelp av (10):
π;2"Rgn(f(k)) = Rgn(π;3(k)) –{c(ø,I)}. I lys av (4) følger da:
∂;3"π;2"Rgn(f(k)) = ∂;3"(Rgn(π;3(k)) –{c(ø,I)})

= Rgn(∂;2(π;3(k))) –{c(ø,I)}.
Dette viser at (15) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (c).

(d) Anta ß;1 og ß;2 er to Tractatus-rammer over henholdsvis D og D' og t=<G,S,K,f> er en T-struktur. Anta t er isomorf med ß;1 og t er isomorf med ß;2.

Fra det forhold at t er isomorf med ß;1 følger at det finnes avbildninger ∂;1, ∂;2 og ∂;3 som oppfyller følgende krav:
(1) ∂;1: G –(1-1,på) –>D
∂;2: S –(1-1,på) –>In(ß;1) – {c(ø,I)}
∂;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß;1(n))
(2) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;3(k)êß;1(n)
(3) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:
∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(4) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(5) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;3(k)) –{c(ø,I)}
Fra det forhold at t er isomorf med ß;2 følger at det finnes avbildninger π;1, π;2 og π;3 som oppfyller følgende krav:
(6) π;1: G –(1-1,på) –>D'
π;2: S –(1-1,på) –>In(ß;2) – {c(ø,I)}
π;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß;2(n))
(7) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
π;3(k)êß;2(n)
(8) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:
π;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = π;3(k)(π;1(x;1),.....,π;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(9) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <π;1(x;1),...,π;1(x;n)>êDom(π;3(k)) &
π;3(k)(<π;1(x;1),...,π;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(10) Er kêK har man π;2"Rgn(f(k)) = Rgn(π;3(k)) –{c(ø,I)}
Vi ønsker å vise at ß,1 er isomorf med ß;2. Definer $;1, $;2 og $;3 ved:
(+) $;1 = π;1°((∂;1);-1)
$;2 = π;3°((∂;3);-1)
$;3 = π;2°((∂;2);-1) U{<c(ø,I),c(ø,I)>}
Det er tilstrekkelig å bevise:
(11) $;1: D –(1-1,på) –>D'
$;2: UN/nêNat/(ß;1(n)) –(1-1,på) –>UN/nêNat/(ß;2(n))
$;3: In(ß;1)U{c(ø,I)} –(1-1,på) –> In(ß;2) U{c(ø,I)}
(12) (An)(nêNat –> (Ax)(xêß;1(n) –> $;2(x)êß;2(n))) & $;3(c(ø,I)) = c(ø,I)
(13) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man
<x;1,...,x;n>êDom(x) <–> <$;1(x;1),...,$;1(x;n)>êDom($;2(x))
for alle x;1,....,x;nêD
(14) Er xêß;1(n) & nêNat & n≥1 har man $;3"Rgn(x) = Rgn($;2(x))
(15) Er aêß;1(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD, så gjelder:

$;3(µ;-1(c;-1(a(<x;1,....,x;n>),I))) = µ;-1(c;-1($;2(a)($;1(x;1),.....,$;1(x;n)),I))
Det skulle være lett å se at (11) følger fra (1) og (6) ved hjelp av definisjonen (+).

Når det gjelder (12) følger det direkte fra definisjonen av $;3 at $;3(c(ø,I)) = c(ø,I). Anta nêNat & xêß;1(n). Da har vi at det finnes kêK slik at ∂;3(k)=x. Det følger videre ved hjelp av (7) at π;3(k)êß;2(n). Man har derfor π;3((∂;3);-1(x))êß;2(n). I lys av (+) følger $;2(x)êß;2(n). Dette viser at (12) holder.

Anta xêß;1(n) & nêNat &n≥1 og x;1,...,x;nêD. Da finnes kêK slik at ∂;3(k) = x. Man må ha Dom(f(k)) Inkl G^n for har man Dom(f(k)) Inkl G^m følger xêß;1(m) og dette er umulig om m≠n. Det finnes y;1,...,y;nêG der ∂;1(y;i) = x;i for i=1,...,n. Det følger også at π;3(k)êß;2(n). Videre følger π;3(y;i)êD' for i=1,...,n.
Men Dom(x) = D^n om xêß;1(n) og Dom(y)=D^n om yêß;2(n). Det følger derfor at <x;1,...,x;n>êDom(x) & <$;1(x;1),...,$;1(x;n)>êDom($;2(x)). Det følger at (13) holder.

Anta xêß;1(n) & nêNat & n≥1. Det må da finnes kêK slik at ∂;3(k) = x. I kraft av (5) har man:

∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;3(k)) –{c(ø,I)} Det følger fra dette at
∂;2"Rgn(f((∂;3);-1(x))) = Rgn(x) –{c(ø,I)}

Videre har vi ved hjelp av (10) at

π;2"Rgn(f((∂;3);-1(x))) = Rgn(π;3((∂;3);-1(x))) –{c(ø,I)} Det følger fra dette:
Rgn(f((∂;3);-1(x))) = (∂;2);-1"Rgn(x) –{c(ø,I)} og derfor:
π;2" (∂;3);-1"Rgn(x) –{c(ø,I)} = Rgn(π;3((∂;3);-1(x))) –{c(ø,I)}

Vi har derfor $;3"(Rgn(x)–{c(ø,I)}) = Rgn($;2(x)) –{c(ø,I)}. Det følger derfor at $;3"Rgn(x) = Rgn($;2(x)). Dette viser at (14) holder.

Vi ønsker nå å gi bevis for (15). Anta aêß;1(n), nêNat der n≥1, og x;1,....,x;nêD. Det følger at det finnes kêK slik at ∂;3(k) = a. Videre må vi av samme grunner som nevnt ovenfor ha Dom(f(k)) Inkl G^n. Det må finnes y;1,..,y;nêG slik at ∂;1(y;i) = x;i for i=1,...,n. Vi skiller nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): <y;1,...,y;n>êDom(f(k)). Da har vi ved hjelp av (3) og (8):
(15) ∂;2(f(k)(<y;1,....,y;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(y;1),.....,∂;1(y;n)) = a(x;1,...,x;n)
(16) π;2(f(k)(<y;1,....,y;n>)) = π;3(k)(π;1(y;1),.....,π;1(y;n))

Man må ha k=(∂;3);-1(a) og derfor i lys av (16):
(17) π;2(f(k)(<y;1,....,y;n>)) = π;3((∂;3);-1(a))(π;1(y;1),.....,π;1(y;n))

Fra (15) har man: f(k)(<y;1,...,y;n>)= (∂;2);-1(a(x;1,....,x;n)). Fra dette og (17) følger:
(18) π;2((∂;2);-1(a(x;1,....,x;n))) = π;3((∂;3);-1(a))(π;1(y;1),.....,π;1(y;n))
= π;3((∂;3);-1(a))(π;1((∂;1);-1(x;1)),.....,π;1((∂;1);-1(x;n)))

Herav: $;3(a(<x;1,....,x;n>)) = $;2(a)($;1(x;1),.....,$;1(x;n)) som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): ¬(<y;1,...,y;n>êDom(f(k))) Siden <x;1,....,x;n>êDom(a) og <$;1(x;1),...,$;1(x;n)>êDom($;2(x)) har man i lys av (4) og (9) at:
a(x;1,....,x;n)= c(ø,I) = $;2(a)($;1(x;1),.....,$;1(x;n)). Det følger at $;3(a(<x;1,....,x;n>)) = $;2(a)($;1(x;1),.....,$;1(x;n)).

Dette viser at (15) holder og avslutter dermed beviset for punkt (d).

(e) Anta T-strukturen t;1= <G,S,K,f> er isomorf med Tractatus-rammen ß over domenet D. Da har man at det finnes avbildninger ∂;1, ∂;2 og ∂;3 som oppfyller følgende krav:

(1) ∂;1: G –(1-1,på) –>D
∂;2: S –(1-1,på) –>In(ß) – {c(ø,I)}
∂;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß(n))
(2) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;3(k)êß(n)
(3) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:

∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(4) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(5) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;3(k)) –{c(ø,I)}

Anta også T-strukturen t;2 =<G',S',K',f'> er isomorf med ß over domenet D. Da har man at det finnes avbildninger π;1, π;2 og π;3 som oppfyller følgende krav:

(6) π;1: G' –(1-1,på) –>D
π;2: S' –(1-1,på) –>In(ß) – {c(ø,I)}
π;3: K' –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß(n))
(7) Er kêK' & nêNat & n≥1 & Dom(f'(k)) Inkl G'^n har man
π;3(k)êß(n)
(8) Er kêK', nêNat der n≥1, og Dom(f'(k)) Inkl G'^n så gjelder:
π;2(f'(k)(<x;1,....,x;n>)) = π;3(k)(π;1(x;1),.....,π;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG' der <x;1,..,x;n>êDom(f'(k))
(9) Er kêK' & nêNat & n≥1 & Dom(f('k)) Inkl G'^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f'(k)) <–>. <π;1(x;1),...,π;1(x;n)>êDom(π;3(k)) &
π;3(k)(<π;1(x;1),...,π;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG'
(10) Er kêK' har man π;2"Rgn(f'(k)) = Rgn(π;3(k)) –{c(ø,I)}

Vi ønsker nå å vise at t;1 er isomorf med t;2. Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(11) (π;1);-1°∂;1: G –(1-1,på) –>G'
(π;2);-1°∂;2: S –(1-1,på) –>S'
(π;3);-1°∂;3: K –(1-1,på) –>K'
(12) Er kêK & n≥1 & nêNat har man
(a) Dom(f(k)) Inkl G^n <–> Dom(f'((π;3);-1(∂;3(k)))) Inkl G^n og
(b) <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>
<(π;1);-1(∂;1(x;1)),...,(π;1);-1(∂;1(x;n))>êDom(f'((π;3);-1(∂;3(k))))
for alle x;1,...,x;nêG
(13) Er kêK har man (π;2);-1"∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(f'((π;3);-1(∂;3(k))))
(14) Er kêK & n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
(π;2);-1(∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>))) =
f'((π;3);-1(∂;3(k)))((π;1);-1(∂;1(x;1)),.....,(π;1);-1(∂;1(x;n)))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,...,x;n>êDom(f(k))

Det er opplagt at (11) følger fra (1) og (6). Anta kêK & n≥1 & nêNat. Anta Dom(f(k)) Inkl G^n. Da følger ved hjelp av (2) at ∂;3(k)êß(n). Nå har vi (π;3);-1(∂;3(k)) = k' for noe k'êK'. Nå må man ha Dom(f(k')) Inkl G^m for noe m der m≥1 &mêNat i lys av definisjonen av T-struktur. Det følger i så fall fra (7) at π;3(k')êß(m). Dette innebærer, siden (π;3);-1(∂;3(k)) = k', at ∂;3(k)êß(m). Men ß(m)Ωß(n)=ø om m≠n. Det følger at m=n og at Dom(f'((π;3);-1(∂;3(k)))) Inkl G^n. Kondisjonalen mot venstre i (12a) bevises på lignende vis.

Anta x;1,...,x;nêG. I lys av (1) og (6) har man da (π;1);-1(∂;1(x;i))êG' for i=1,..,n. Vi har åpenbart også at (π;3);-1(∂;3(k))êK'. Det følger fra dette, (4) og (9):

(15) <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)

(16) <(π;1);-1(∂;1(x;1)),...,(π;1);-1(∂;1(x;n))>êDom(f'((π;3);-1(∂;3(k)))) <–>.
<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)

Fra (15) og (16) følger imidlertid (12b).

Siden kêK har vi i lys av (1) og (6) at det finnes k'êK slik at k'= (π;3);-1(∂;3(k)). Ved hjelp av (5) og (10) har man derfor:
∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;3(k)) –{c(ø,I)}
π;2"Rgn(f'(k')) = Rgn(π;3(k')) –{c(ø,I)}

Men dette impliserer (π;2);-1"∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(f'((π;3);-1(∂;3(k)))) som er det vi ønsker.

Anta kêK & n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n og at x;1,...,x;nêG der <x;1,...,x;n>êDom(f(k)). I lys av (1) og (6) må det da finnes y;1,...,y;nêD' og k'êK' slik at (17) y;i = (π;1);-1(∂;1(x;i)) (i=1,..,n) og (18) k' = (π;3);-1(∂;3(k)). Ved hjelp av (3) og (8) har man da:
(19) ∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))
(20) π;2(f'(k')(<x;y,....,y;n>)) = π;3(k')(π;1(y;1),.....,π;1(y;n))

Fra (17) – (20) kan man slutte at
(π;2);-1(∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>))) =
f'((π;3);-1(∂;3(k)))((π;1);-1(∂;1(x;1)),.....,(π;1);-1(∂;1(x;n)))

Dette viser at (14) holder.

Dette avslutter vårt bevis for punkt (e).

(f) Anta t;1 og t;2 er to T-strukturer og ß en Tractatus-ramme. Anta t;1 er isomorf med ß og t;1 er isomorf med t;2. Anta t;1=<G,S,K,f> og t;2=<G',S',K',f'>. Fra det at t;1 er isomorf med ß følger at det finnes avbildninger ∂;1, ∂;2 og ∂;3 som oppfyller følgende krav:
(1) ∂;1: G –(1-1,på) –>D
∂;2: S –(1-1,på) –>In(ß) – {c(ø,I)}
∂;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß(n))
(2) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;3(k)êß(n)
(3) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:
∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(4) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(5) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;3(k)) –{c(ø,I)}

Fra det at t;1 er isomorf med t;2 følger etter Definisjon 5 at det finnes funksjoner π;1,π;2 og π;3 som oppfyller følgende krav:
(6) π;1: G –(1-1,på) –>G'
π;2: S –(1-1,på) –>S'
π;3: K –(1-1,på) –>K'
(7) Er kêK & n≥1 & nêNat har man
(a) Dom(f(k)) Inkl G^n <–> Dom(f'(π;3(k))) Inkl G^n og
(b) <x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–> <π;1(x;1),...,π;1(x;n)>êDom(f'(π;3(k)))
for alle x;1,...,x;nêG
(8) Er kêK har man π;2"Rgn(f(k)) = Rgn(f'(π;3(k))
(9) Er kêK & n≥1 & nêNat & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
π;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = f'(π;3(k))(π;1(x;1),.....,π;1(x;n)) for alle

x;1,...,x;nêG der <x;1,...,x;n>êDom(f(k))

Vi ønsker å vise at t;2 er isomorf med ß. For dette formål er det i lys av definisjonen tilstrekkelig å vise:

(10) ∂;1°((π;1);-1): G' –(1-1,på) –>D
∂;2°((π;2);-1): S' –(1-1,på) –>In(ß) – {c(ø,I)}
∂;3°((π;3);-1): K' –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß(n))

(11) Er kêK' & nêNat & n≥1 & Dom(f'(k)) Inkl G'^n har man
∂;3((π;3);-1)(k))êß(n)

(12) Er kêK', nêNat der n≥1, og Dom(f'(k)) Inkl G'^n så gjelder:
∂;2((π;2);-1(f'(k)(<x;1,....,x;n>))) =
∂;3((π;3);-1)(k))(∂;1((π;1);-1(x;1)),.....,∂;1((π;1);-1(x;n)))
for alle x;1,...,x;nêG' der <x;1,..,x;n>êDom(f'(k))

(13) Er kêK' & nêNat & n≥1 & Dom(f'(k)) Inkl G'^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f'(k)) <–>.
<∂;1((π;1);-1(x;1)),...,∂;1((π;1);-1(x;n))>êDom(∂;3((π;3);-1(k))) &
∂;3((π;3);-1(k))(<∂;1((π;1);-1(x;1)),...,∂;1((π;1);-1(x;n))>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG'

(14) Er kêK' har man ∂;2"((π;2);-1)"Rgn(f'(k))) =
Rgn(∂;3((π;3);-1(k))) –{c(ø,I)}

Det skulle være klart at (10) holder i lys av (1) og (6).

Anta kêK' & nêNat & n≥1 & Dom(f'(k)) Inkl G'^n. Da har man (π;3);-1(k)êK. Videre har man ved hjelp av (7): Dom(f((π;3);-1(k))) Inkl G^n. Ved hjelp av (2) følger da ∂;3((π;3);-1(k))êß(n). Dette viser at (11) holder.

Anta kêK', nêNat der n≥1, og Dom(f'(k)) Inkl G'^n og at x;1,...,x;nêG' der <x;1,..,x;n>êDom(f'(k)). Da finnes det k'êK slik at k'= (π;3);-1(k) og det finnes y;1,...,y;nêG slik at π;1(y;i) = x;i for i=1,...,n. I lys av (9) har man da:

π;2(f(k')(<y;1,....,y;n>)) = f'(π;3(k'))(π;1(y;1),.....,π;1(y;n))

Fra dette følger (π;2);-1(f'(k)(x;1,...,x;n)) = f((π;3);-1(k))((π;1);-1(x;1),...,(π;1);-1(x;n))

Men fra dette og (3) følger:

∂;2((π;2);-1(f'(k)(<x;1,....,x;n>))) =
∂;3((π;3);-1)(k))(∂;1((π;1);-1(x;1)),.....,∂;1((π;1);-1(x;n)))

Dette viser at (12) holder.

Anta kêK' & nêNat & n≥1 & Dom(f'(k)) Inkl G'^n og x;1,...,x;nêG'. Da har man
<x;1,...,x;n>êDom(f'(k)) <–> <(π;1);-1(x;1),...,(π;1);-1(x;n)>êDom(f'((π;3);-1(k)))
<–> <∂;1((π;1);-1(x;1)),...,∂;1((π;1);-1(x;n))>êDom(∂;3((π;3);-1(k))) &
∂;3((π;3);-1(k))(<∂;1((π;1);-1(x;1)),...,∂;1((π;1);-1(x;n))>)≠ c(ø,I)

I lys av (4). Dette viser at (13) holder.

Anta kêK'. Da har man (π;3);-1(k)êK'. Fra dette og (5) følger:

∂;2"Rgn(f((π;3);-1(k))) = Rgn(∂;3((π;3);-1(k))) –{c(ø,I)}

Fra (8) har man videre π;2"Rgn(f((π;3);-1(k))) = Rgn(f'(k)) og derfor
(π;2);-1)"Rgn(f'(k))) = Rgn(f((π;3);-1(k)). Det følger fra dette at ∂;2"((π;2);-1)"Rgn(f'(k))) = Rgn(∂;3((π;3);-1(k))) –{c(ø,I)}. Dette viser at (14) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for punkt (f).

Dette avslutter beviset for Teorem 4. **Q.E.D.**

Bevis for Teorem 5: Fra forutsetningene i satsen kan vi ordrett som i beviset for Teorem 2 utlede at ß;T er en Tractatus-ramme over D. Det eneste vi må vise i tillegg er at <G,S,K,f> er isomorf med ß;T. Det følgende kan derfor leses som en ren fortsettelse av beviset for Teorem 2. Vi definerer tre funksjoner ∂;1, ∂;2 og ∂;3 ved:

(1) ∂;1 = Mg(<x,x>: xêG)
∂;2 = H
∂;3 = Mg(<k,E;k>: kêK)

I lys av den relevante definisjonen av isomorfi vil det være tilstrekkelig å bevise følgende påstander:

(2) ∂;1: G –(1-1,på) –>D
∂;2: S –(1-1,på) –>In(ß) – {c(ø,I)}
∂;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß;T(n))
(3) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;3(k)êß;T(n)
(4) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:
∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(5) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(6) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;3(k)) –{c(ø,I)}

Det er klart at den første påstanden i (2) holder i lys av definisjonen av ∂;1 og det forhold at G=D. Dette siste er en av forutsetningene i teoremet.

H er selvfølgelig definert som under (c) i beviset for Teorem 2. Der beviste vi: H : S–(1-1,på)–> In(ß;T) –{µ;-1(ø)}. Det følger at den andre påstanden i (2) holder.

Det skulle være åpenbart at ∂;3 er en funksjon og at domenet til ∂;3 er K. Anta xêUN/nêNat/(ß;T(n)). Da har man at x êß;T(n) for noe nêNat. Fra definisjonen av ß;T følger da at x= E;k for noe kê∂;n. Det følger altså at ∂;3(k) =x for noe kêK. Dette innebærer at ∂;3 er på UN/nêNat/(ß;T(n)). Det er imidlertid også nødvendig å vise at ∂;3 er en-entydig. Anta derfor k1,k2êK og at k1≠k2. Vi må da vise at E;k1 ≠ E;k2. Siden k1,k2êK finnes det entydig bestemte naturlige tall n1 og n2 slik at Dom(f(k1)) Inkl n1 og Dom(f(k2)) Inkl n2. Vi har da fra definisjonen av E at Dom(E;k1) = D^n1 og Dom(E;k2) = D^n2. Er n1≠n2 følger det da umiddelbart at E;k1≠E;k2. Er n1=n2 har vi, siden k1≠k2 at
(7) Rgn(f(k1))ΩRgn(f(k2)) =ø. Anta for reduktio ad absurdum at E;k1=E;k2. Det er nå to muligheter:

Tilfelle (i) Dom(f(k1))ΩDom(f(k2))≠ø. Da finnes det a der aêDom(f(k1)) og der aêDom(f(k2)). I dette tilfelle har vi aêD^n1=D^n2 og derfor i lys av definisjonen av E at
(8) E;k1(a) =c(Mg(w: wêI & f(k1)‘aêƒ(w)),I) =
c(Mg(w: wêI & f(k2)‘aêƒ(w)),I) = E;k2(a)

Men f(k1)(a)êRgn(f(k1)) & f(k2)(a)êRgn(f(k2)). Fra dette og (7) følger at f(k1)(a)≠f(k2)(a). Dette og (8) impliserer at E;k1(a)≠E;k2(a) som strider mot E;k1=E;k2. Dette tilfelle er altså utelukket.

Tilfelle (ii): Dom(f(k1))ΩDom(f(k2)) = ø. Siden Dom(f(k1))≠ø, (Jmf. definisjonen av T-struktur) og vi antar at n1=n2, har vi at det finnes a slik at aêDom(f(k1)) & aê(D^n1–Dom(f(k2))). Ved hjelp av definisjonen av E følger da E;k1(a)≠c(ø,I) & E;k2(a)=c(ø,I). Vi har derfor også i dette tilfellet at E;k1(a)≠E;k2(a), noe som er umulig.

Siden begge mulighetene leder til en motsigelse følger det at E;k1≠E;k2. Dette viser at ∂;3 er en-entydig. Vi har nå bevist (2) ovenfor.

Anta kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n. Da har man kê∂;n og derfor at E;kêß;T(n). Men da ∂;3(k) = E;kêß;T(n). Dette viser at (3) holder.

Anta kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n og dessuten at x;1,...,x;nêG der

<x;1,..,x;n>êDom(f(k)). Vi ønsker å vise:

∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))

I lys av definisjonene av ∂;1,∂;2 og ∂;3 er dette ekvivalent med:

(9) H(f(k)(<x;1,...,x;n>)) = E;k(<x;1,....,x;n>). Det er altså tilstrekkelig å bevise dette. Nå har man at H(x) = E;(q1(x))(q2(x)) om xêS. Videre har vi åpenbart at f(k)(<x;1,...,x;n>)êS. Vi har

q1(f(k)(<x;1,...,x;n>)) = (ik')(k'êK & f(k)(<x;1,...,x;n>))êRgn(f(k')) =k i lys av definisjonen av T-struktur. Videre er det åpenbart i lys av definisjonen av q2 at q2(f(k)(<x;1,...,x;n>) = <x;1,...,x;n> siden f(k) er en-entydig. Det følger fra dette, om vi setter s0= f(k)(<x;1,...,x;n>) at

H(f(k)(<x;1,...,x;n>)) = H(s0) = E;q1(s0)(q2(s0)) = E;k(<x;1,...,x;n>). Dette viser at (4) holder.

Anta kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n og at x;1,...,x;nêG. Vi ønsker i så fall å vise:

<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)

Det vil være nok å vise:

<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <x;1,...,x;n>êDom(E;k) &
E;k(<x;1,....,x;n>)≠ c(ø,I)

Dette følger imidlertid lett fra definisjonen av E;k. Dette viser at (5) holder.

For å bevise (6) er det tilstrekkelig å bevise:

(10) Mg(H(x): xêRgn(f(k))) = Rgn(E;k) –{c(ø,I)} om kêK. Er imidlertid kêK har man i lys av definisjonen av E;k at

Rgn(E;k)–{c(ø,I)} = Mg(c(Mg(w: wêI & f(k)'aêƒ(w)),I): aêDom(f(k)))

Nå har man at Rgn(f(k)) = Mg(f(k)'a: aêDom(f(k))). Man har derfor:

(11) Mg(H(x): xêRgn(f(k))) = Mg(H(f(k)'a) : aêDom(f(k))

I beviset for Teorem 2 viste vi imidlertid at

H(x) = c(Mg(w: wêI & xêƒ(w)),I) for alle xêS. Det følger at Mg(H(f(k)'a) : aêDom(f(k)) = Mg(c(Mg(w: wêI & f(k)'aêƒ(w)),I): aêDom(f(k)))

Fra dette og (11) følger det at (10) holder. Vi har nå vist at T-strukturen <G,S,K,f> er isomorf med ß;T.

Dette avslutter beviset for Teorem 5. **Q.E.D.**

Bevis for Teorem 6: Vi har tidligere i beviset for Teorem 3 vist at <G,S,K,f> er en T-struktur gitt at forutsetningene i satsen holder. Det eneste vi nå behøver å gjøre er å vise at denne T-strukturen er isomorf med Tractatus-rammen ß. Vi definerer tre funksjoner ∂;1, ∂;2 og ∂;3 slik:

(2) ∂;1 = Mg(<x,x>: xêD)
∂;2 = Mg(<x,x>: xêS)
∂;3 = Mg(<x,x>: xêK)

Man ser at ∂;1 – ∂;3 er identitetsrelasjonen begrenset til henholdsvis D,S og K. I lys av den relevante definisjonen av isomorfi vil det være tilstrekkelig å bevise følgende påstander:

(2) ∂;1: G –(1-1,på) –>D
∂;2: S –(1-1,på) –>In(ß) – {c(ø,I)}
∂;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß(n))

(3) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
∂;3(k)êß(n)

(4) Er kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n så gjelder:

∂;2(f(k)(<x;1,....,x;n>)) = ∂;3(k)(∂;1(x;1),.....,∂;1(x;n))
for alle x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k))
(5) Er kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–>. <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
for alle x;1,...,x;nêG
(6) Er kêK har man ∂;2"Rgn(f(k)) = Rgn(∂;3(k)) –{c(ø,I)}

Fra forutsetningene i satsen og definisjonen som er gitt av G ser man at G=D. Det følger derfor at den første påstanden i (2) holder.

For å vise at ∂;2: S –(1-1,på) –>In(ß) – {c(ø,I)} er det tilstrekkelig å bevise (7) S = In(ß) – {c(ø,I)}. Anta xêS for vilkårlig x. Da har man etter definisjonen av S at xêRgn(f(y)) for noe yêK=UN/nêNat/ß(n). Dette impliserer yêß(n) for noe nêNat. Siden xêRgn(f(y)) har vi at det finnes z slik at x=f(y)(z). Det følger at xêIn(ß). Siden x=f(y)(z) har man zêDom(f(y)) = Mg(v: vêDom() & y(v)≠c(ø,I)). Dette impliserer at y(z)≠c(ø,I). Men herav x≠c(ø,I). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (7) holder.

Anta på den annen side at xê(In(ß)–{c(ø,I)}). Da finnes nêNat der n≥1 og aêß(n)& zêD^n slik at x=a(z) der x≠c(ø,I). Det følger at
zêMg(y: yêDom(a) & a(y)≠c(ø,I)) og derfor at x=f(a)(z) Siden aêß(n) følger aêK. Vi har derfor xêRgn(f(a)) & aêK. Herav følger at xêS. Dette gir en et fullstendig bevis for (7). Det er trivielt at ∂;3: K –(1-1,på) –> UN/nêNat/(ß(n)) siden ∂;3 er identitetsavbildningen begrenset til K og K=UN/nêNat/(ß(n)).

La oss vise at (3) holder: Anta kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n. Det følger da ∂;3(k) = k. Vi har i lys av definisjonen av f at
Dom(f(k)) = Mg(y: yêDom(k) & x(k)≠c(ø,I)). Vi har at Dom(f(k))≠ø og derfor at det finnes zêDom(f(k)). Da zêG^n. Men zêDom(k). Det følger at Dom(k) Inkl G^n og derfor at kêß(n).

Anta kêK, nêNat der n≥1, og Dom(f(k)) Inkl G^n og anta x;1,...,x;nêG der <x;1,..,x;n>êDom(f(k)). I lys av (1) og (2) vil det være tilstrekkelig å vise:
f(k)(<x;1,....,x;n>) = k(<x;1,....,x;n>).
Dette følger imidlertid umiddelbart fra definisjonen av f(k). Dette viser at (4) holder.

Anta kêK & nêNat & n≥1 & Dom(f(k)) Inkl G^n og at x;1,...,x;nêG. Da har man
<x;1,...,x;n>êDom(f(k)) <–> <x;1,...,x;n>êMg(y: yêDom(k) & k(y)≠c(ø,I))
<–> <x;1,....,x;n>êDom(k) & k(<x;1,...,x;n>)≠c(ø,I)
<–> <∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>êDom(∂;3(k)) &
∂;3(k)(<∂;1(x;1),...,∂;1(x;n)>)≠ c(ø,I)
Dette viser at (5) holder.

Anta kêK. For å vise (5) er det tilstrekkelig å vise:
(+) Rgn(f(k)) = Rgn(k) –{c(ø,I)}
Anta xêRgn(f(k)) for vilkårlig x. Da har man, i lys av definisjonen av f(k), at det finnes zêDom(f(k)) slik at x= f(k)(z). Siden zêDom(f(k)) har man
zêMg(y: yêDom(k) & k(y)≠c(ø,I)). Dette impliserer zêDom(k) og derfor at k(z)êRgn(k) & k(z)≠c(ø,I). Men er zêDom(f(k)) har vi f(k)(z) = k(z). Man har derfor xê(Rgn(k)–{c(ø,I)}). Har man på den annen side xê(Rgn(k)–{c(ø,I)}) for vilkårlig x følger xêRgn(k) & x≠c(ø,I). Det må da finnes z der zêDom(k) &x=k(z). Vi har da zêMg(y: yêDom(k) & k(y)≠c(ø,I)) og derfor, i lys av definisjonen av f, at x=f(k)(z). Men dette impliserer xêRgn(f(k)). Dette viser at (+) holder.

Vi har nå vist at <G,S,K,f> er isomorf med ß. Dette avslutter beviset for Teorem 6.
Q.E.D.

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985

Rognes [2], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985

Rognes [3], Rognes, Morten, *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1987

Rognes [4], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del I.* , Upublisert manuskript, 1986

Rognes [5], Rognes, Morten. *Egenskaper. Del II (Bevis for teoremer)* , Upublisert manuskript, 1987

Takeuti [1], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

Wittgenstein [1], Wittgenstein, Ludwig, Tractatus Logico-Philosophicus, Suhrkamp Verlag, 1964.